M.V.LOMONOSOV MOSCOW STATE UNIVERSITY
Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics

Sadovnichaya I.V., Fomenko T.N., Khoroshilova E.V.

MATHEMATICAL ANALYSIS

REAL NUMBERS, LIMIT OF NUMBER SEQUENCE: THEORY AND PROBLEMS

Text-book
for 1-st year university students

Under general editorship by V.A. Ilyin, member of Russian Academy of Sciences

МАКС ПРЕСС

MOSCOW — 2011

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

Факультет вычислительной математики и кибернетики

И.В. Садовничая, Т.Н. Фоменко, Е.В. Хорошилова

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

ВЕЩЕСТВЕННЫЕ ЧИСЛА И ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ: ТЕОРИЯ И ЗАДАЧИ

Учебное пособие
для студентов 1 курса университетов

Под общей редакцией академика РАН В.А. Ильина

МАКС ПРЕСС

МОСКВА — 2011

УДК 378(075.8):517.2
ББК 22.161я73
С14

Печатается по решению Редакционно-издательского совета факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ имени М.В. Ломоносова

Рецензенты:
доценты факультета ВМК МГУ
к.ф.-м.н. Тихомиров В.В., д.ф.-м.н. Фомичёв В.В.

Садовничая И.В., Фоменко Т.Н., Хорошилова Е.В.

С14 **Математический анализ: Вещественные числа и последовательности: Теория и задачи:** Учеб. пособие для студентов 1 курса университетов. – М.: Издательский отдел факультета ВМиК МГУ им. М.В. Ломоносова (лицензия ИД N 05899 от 24.09.2001 г.); МАКС Пресс, 2011. – 80 с.
ISBN 978-5-89407-457-3
ISBN 978-5-317-03797-0

Издание посвящено теоретическим и практическим аспектам тем «Вещественные числа» и «Предел числовой последовательности», изучаемых в первом семестре в рамках программы курса математического анализа. Оно основано на опыте чтения авторами лекций и ведения практических занятий на факультете ВМК МГУ. Пособие содержит 3 главы, первая из которых посвящена понятию вещественного числа, его алгебраической и геометрической интерпретации, операциям над вещественными числами и их свойствам, проблеме полноты арифметики вещественных чисел. Во второй главе излагается теория последовательностей вещественных чисел, вводится понятие предела последовательности, изучаются свойства сходящихся последовательностей, замечательные пределы и способы их вычисления. В третьей главе приводится набор задач по всем рассматриваемым разделам, часть из которых излагается с полным решением, а часть дается для самостоятельной работы студентов. Цель данного учебного пособия – помочь студенту в изучении теоретической части и приобретении практических навыков решения задач по темам «Вещественные числа» и «Предел числовой последовательности».

Для студентов университетов. Издание может быть полезно также преподавателям, читающим лекции и ведущим практические занятия по математическому анализу и всем, кто желает самостоятельно изучить данные темы или более подробно с ними ознакомиться.

УДК 378(075.8):517.2
ББК 22.161я73

ISBN 978-5-89407-457-3
ISBN 978-5-317-03797-0

ПРЕДИСЛОВИЕ 04

ГЛАВА 1. ВЕЩЕСТВЕННЫЕ ЧИСЛА 05

§1. Элементы теории множеств. Операции над множествами. Отображения множеств. Мощность множества 05

§2. Отношения на множествах. Эквивалентности, порядки. Фактор-множество. Понятие об алгебраической системе 09

§3. Вещественные числа. Числовая ось. Сравнение вещественных чисел. Приближение вещественных чисел рациональными 12

§4. Алгебраическая система (арифметика) вещественных чисел. Ее полнота. Различные модели построения арифметики вещественных чисел 18

ГЛАВА 2. ЧИСЛОВЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ 27

§1. Понятие последовательности. Ограниченные и неограниченные, бесконечно малые и бесконечно большие последовательности 27

§2. Сходящиеся последовательности и их свойства 29

§3. Монотонные последовательности 33

§4. Предельные точки последовательностей 37

§5. Критерий Коши сходимости последовательности 41

ГЛАВА 3. ЗАДАЧИ 42

§1. Задачи к первой главе 42

§2. Задачи ко второй главе 46

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ 64

ПРЕДИСЛОВИЕ.

Уважаемые читатели! Наше учебное пособие содержит материал по темам «Вещественные числа» и «Предел числовой последовательности» в объёме программы по математическому анализу для студентов первого курса факультета ВМК (как специалистов, так и бакалавров) и некоторые дополнения .

В пособии 3 главы. В 1 и 2 главах излагается теоретический материал, в 3 главе предлагаются задачи по всем разделам первых двух глав.

В первой главе, написанной Т.Н.Фоменко, излагается теоретический материал по теме «Вещественные числа». Более мелким шрифтом и горизонтальными линиями здесь выделен дополнительный материал, не входящий в программу 1 курса факультета ВМК. Мы поместили его для полноты изложения данной темы. Во второй главе, написанной И.В.Садовничей, содержится теоретический материал по теме «Предел числовой последовательности». В каждой из первых двух глав своя двойная нумерация определений и всех утверждений, с указанием номера параграфа. В третьей главе, написанной Е.В.Хорошиловой, помещены задачи по всем разделам первых двух глав. В ней содержатся не только задачи из известного задачника Б.П.Демидовича, но и из других источников. Наряду с вычислительными задачами, приводится ряд задач на доказательство. Мы полагаем, что их решение является одной из наиболее эффективных форм усвоения теоретического материала. При этом часть задач приводится с подробными решениями, а остальные даются для самостоятельной работы студентов. Все задачи снабжены ответами, а в некоторых случаях указаниями к решению.

В конце пособия мы приводим список основной и дополнительной литературы, где перечисляем учебники и задачники, которые использовались нами при составлении данного пособия, а также некоторые источники для дальнейшего знакомства с изложенными в пособии темами.

Пособие предназначено, в первую очередь, для студентов первого курса факультета ВМК МГУ, а также для первокурсников других университетов, изучающих математический анализ. Мы надеемся, что оно окажется полезным как студентам, так и преподавателям при изучении или преподавании данной темы.

И.В.САДОВНИЧАЯ, Т.Н.ФОМЕНКО, Е.В.ХОРОШИЛОВА.

Глава 1. Вещественные числа.

§1. Элементы теории множеств. Операции над множествами. Отображения множеств. Мощность множества.

Определение 1.1. *Множеством называют совокупность объектов произвольной природы, называемых его* ***элементами***.

Примеры.

1.1) множество точек на прямой;

1.2) множество студентов в аудитории;

1.3) множество натуральных чисел $\mathbb{N}$;

1.4) множество целых чисел $\mathbb{Z}$;

1.5) множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$.

Если элемент a принадлежит множеству A, то пишут: $a \in A$. Если все элементы множества B содержатся в множестве A, то говорят, что B является *подмножеством* A, и пишут: $B \subseteq A$. Если при этом в множестве A есть элементы не принадлежащие B, то пишут: $B \subset A$. *Пустым множеством* называют условное множество, в котором нет ни одного элемента. Оно обозначается символом $\emptyset$. Пустое множество принято считать подмножеством любого множества.

Способы задания множеств.

1. *Перечисление элементов* множества (например: $A = \{1, 5, 7, 9\}$);

2. *Выделение признаков*, характеризующих элементы данного множества (например: $k\mathbb{Z} = \{x \in \mathbb{Z} | x -$ число, кратное $k\}$, где $k > 1$ - фиксированное натуральное число);

3. *Задание характеристической функции* множества A (в виде таблицы ее значений или графика). Это функция $\chi : B \to \{0, 1\}$, определенная на некотором множестве B, $A \subseteq B$, которая задается так: $\chi(x) = \begin{cases} 0, & x \notin A, \\ 1, & x \in A. \end{cases}$

Основные операции над множествами.

Определение 1.2. ***Объединением*** *двух множеств A и B называется множество $A \cup B$, элементами которого являются как элементы множества A, так и элементы множества B. Иначе говоря, $x \in A \cup B$ тогда и только тогда, когда либо $x \in A$, либо $x \in B$. Кратко это можно записать так: $(x \in A \cup B) \Leftrightarrow ((x \in A) \vee (x \in B))$. Символ $\vee$ (логическая дизъюнкция) заменяет союз „или" и означает выполнение хотя бы одного из тех условий, которые он соединяет.*

Определение 1.3. ***Пересечением*** *двух двух множеств A и B называется множество $A \cap B$, элементами которого являются общие элементы множеств A и B. Иначе говоря, $x \in A \cap B$ тогда и только тогда, когда одновременно $x \in A$ и $x \in B$. Кратко это можно записать так: $(x \in A \cap B) \Leftrightarrow ((x \in A) \wedge (x \in B))$. Символ $\wedge$*

(логическая конъюнкция) заменяет союз „и" и означает одновременное выполнение тех условий, которые он соединяет.

Определение 1.4. ***Дополнением*** *множества B до множества A (или* ***разностью*** *множеств A и B) называется множество $A \setminus B$, состоящее из тех элементов множества A, которые не принадлежат B. Кратко это можно записать так: $(x \in A \setminus B) \Leftrightarrow ((x \in A) \wedge (x \notin B))$.*

Комбинируя основные операции, можно рассматривать более сложные операции, например, симметрическую разность.

Определение 1.5. ***Симметрической разностью*** *множеств A и B называется множество $A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.*

Примеры.

1.6) $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ - все целые числа, не являющиеся натуральными;

1.7) $\mathbb{N} \cup \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$;

1.8) $\mathbb{N} \cap \mathbb{Z} = \mathbb{N}$;

1.9) $2\mathbb{Z} \triangle 3\mathbb{Z}$ - множество целых чисел, делящихся либо на 2, либо на 3, но не делящихся на 6.

Операции над множествами изображены символически штриховкой на Рис.1-4.

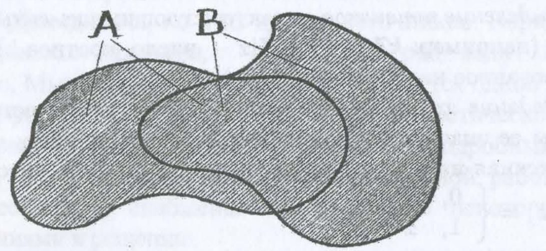

Рис. 1: Объединение множеств $A \cup B$.

Свойства операций над множествами.

Перечислим основные свойства объединения, пересечения и дополнения.

1) $A \cup \emptyset = A$;

2) $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$;

3) $A \cup A = A$;

4) $A \cup B = B \cup A$;

5) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$;

6) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;

7) $(A \setminus B) \cup (A \setminus C) = (A \setminus (B \cap C)$;

8) $(A \setminus B) \cap (A \setminus C) = A \setminus (B \cup C)$. $\square$

Свойства 7) и 8) называют *законами двойственности*. Благодаря им, в свойствах 3)-6) можно менять местами операции $\cup$ и $\cap$.

Отображения множеств.

Определение 1.6. ***Отображением*** *$f : A \to B$ из множества A в множество B называется правило f, сопоставляющее каждому элементу $a \in A$ единственный элемент $b = f(a) \in B$, который называют образом элемента a при отображении f, а всякий элемент a, для которого $b = f(a)$ (вообще говоря, не единственный), называют прообразом элемента b при отображении f.*

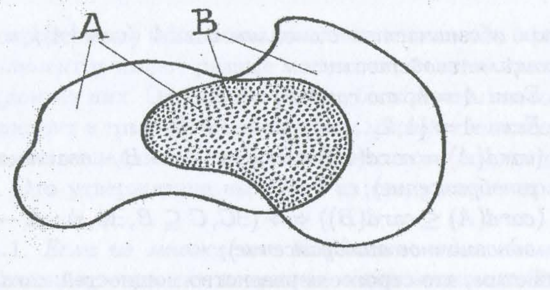

Рис. 2: Пересечение множеств $A \cap B$.

Определение 1.7. *Отображение $\varphi : A \to B$ из множества A в множество B, называется* ***взаимно-однозначным****, если одновременно выполнены следующие 2 условия:*

1) $(\varphi(a) = \varphi(b)) \Rightarrow (a = b)$ (инъективность),

2) $\forall b \in B \exists a, a \in A, \varphi(a) = b$ (сюръективность).

Определение 1.8. *Если отображение $\varphi : A \to B$ из множества A в множество B взаимно-однозначно, то отображение, ставящее в соответствие каждому элементу $y \in B$ его прообраз (то есть единственный элемент $x \in A$, для которого $\varphi(x) = y$), называется* ***обратным*** *отображением и обозначается $\varphi^{-1} : B \to A$.*

Пример 1.10). Отображение $f : [0;1] \to [0;1]$, где $f(x) = x^2$, является взаимно-однозначным. Обратным к нему является отображение $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$.

Мощность множества.

Определение 1.9. ***Мощность*** *(или* ***кардинал****, или* ***кардинальное число****) множества A - это характеристика множества,*

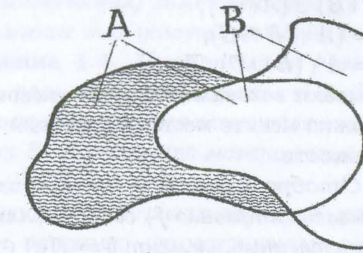

Рис. 3: Дополнение множеств $A \setminus B$.

которая обозначается символом $\underline{cardA}$ *(или $|A|$) и определяется следующими свойствами:*

1) Если $A = \emptyset$, то $card(A) = 0$;

2) Если $A = \{1, 2, ..., n\}$, то $card(A) = n$;

3) $(card(A) = card(B)) \iff (\exists \varphi : A \to B$ – взаимно-однозначное отображение);

4) $(card(A) \leq card(B)) \iff (\exists C, C \subseteq B, \exists \psi, \psi : A \to C$ – взаимно-однозначное отображение);

Отметим, что строгое неравенство мощностей: $card(A) < card(B)$ означает, что имеется взаимно-однозначное отображение множества A на некоторое подмножество $C, C \subset B$, не совпадающее с B. Однако при этом не существует никакого взаимно-однозначного отображения множества A на все множество B.

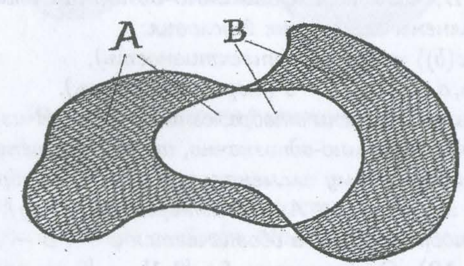

Рис. 4: Симметрическая разность множеств $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

пустое

Примеры и обозначения мощностей.

конечное

1.11) Мощность множества натуральных чисел - $card(\mathbb{N}) = \aleph_0$ (читается: *алеф-нуль*). Множества мощности $\aleph_0$ называются *счетными*.

счетное

1.12) Мощность множества точек интервала $(0; 1)$ - $card((0; 1)) = c$, читается: *континуум* (иногда обозначается также буквой алеф: $\aleph$). Множества мощности c называются *континуальными*.

континум

1.13) 2^A - множество всевозможных подмножеств данного множества A, включая пустое подмножество и само множество A. Например, если $A = \{1, 2\}$, то $2^A = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$. При этом $card(A) = 2 < card(2^A) = 4$.

На самом деле имеет место следующее общее утверждение.

Теорема 1.1. *Для всякого множества A верно, что $card(A) < card(2^A)$.* $\square$

Согласно определению мощности, конечные множества с различным числом элементов имеют разные мощности, равные числу элементов в каждом из них. Основное отличие бесконечных множеств от конечных состоит в том, что в бесконечном множестве всегда есть подмножество, не совпадающее со всем множеством, но равное ему по мощности. Это утверждение вытекает из следующего простого факта.

Лемма 1.1. *Если из множества $\mathbb{N}$ удалить один элемент - какое-нибудь число n, - то его мощность не изменится. То есть $card(\mathbb{N} \setminus \{n\}) = \aleph_0$.*

Доказательство. Достаточно установить взаимно-однозначное отображение из исходного множества $\mathbb{N}$ в полученное множество $\mathbb{N} \setminus \{n\}$. Положим $\varphi(k) = k$, если $1 \leq k \leq n - 1$, и $\varphi(k) = k + 1$, если $k \geq n$.

$$\varphi(k) = \begin{cases} k, & 1 \leq k \leq n - 1; \\ k + 1, & k \geq n. \end{cases}$$

Легко видеть, что отображение φ является взаимно-однозначным. $\square$

Пользуясь леммой 1.1, легко доказать следующее утверждение.

Следствие 1.1. *Удаление или добавление конечного числа элементов не меняет мощности любого бесконечного множества.* $\square$

§2. Отношения и операции на множестве. Эквивалентности, порядки, фактор-множество. Понятие об алгебраической системе.

Определение 2.1. *Прямым произведением $n, n \geq 2$ заданных непустых множеств $A_1, A_2, ..., A_n$ называется совокупность всевозможных упорядоченных наборов $A_1 \times ... \times A_n = \{(a_1, a_2, ..., a_n) | a_i \in A_i, i = 1, 2, ..., n\}$.*

Определение 2.2. ***n*-арным отношением** *на данном непустом множестве A ($n \geq 1$) называется произвольное непустое подмножество его n-ой степени, то есть прямого произведения $A \times \dots \times A$ n экземпляров множества A. При $n = 0, 1, 2$ n-арное отношение называют соответственно* ***нульарным, унарным, бинарным.***

Отметим, что отображение из множества A в множество B можно определять (подразумевая его график) как подмножество прямого произведения $A \times B$ с дополнительными свойствами. (Сравните следующее определение 2.3 с определением 1.6.)

Определение 2.3. ***Отображением*** *из множества A в множество B называется такое отношение $f \subseteq A \times B$, что выполнены 2 условия:*

1) $\forall a \in A, \exists b \in B, (a, b) \in f$;

2) $((a, b) \in f) \wedge ((a, c) \in f) \Rightarrow (b = c)$.

Рассмотрим два наиболее часто встречающиеся типа бинарных отношений на множествах, а именно, отношения эквивалентности и отношения порядка. Пусть А - некоторое непустое множество.

Определение 2.4. *Бинарное отношение $\tau \subseteq A \times A$ называется* ***эквивалентностью,*** *если оно удовлетворяет следующим свойствам:*

1) $\forall a \in A, (a, a) \in \tau$ (рефлексивность);

2) $((a, b) \in \tau) \Rightarrow ((b, a) \in \tau)$(симметричность);

3) $((a, b) \in \tau) \wedge (b, c) \in \tau)) \Rightarrow ((a, c) \in \tau)$(транзитивность).

При этом, если $(a, b) \in \tau$, то говорят, что элементы a, b являются τ-эквивалентными друг другу. В этом случае применяется также обозначение: $a\tau b$.

Определение 2.5. ***Разбиением*** *непустого множества A называется совокупность его непустых подмножеств $S = \{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$, где I - некоторое непустое множество индексов, и выполнены следующие два условия:*

$$1) \quad U_\alpha \cap U_\beta = \emptyset, \text{ если } \alpha, \beta \in I \text{ и } \alpha \neq \beta; \quad 2) \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha = A.$$

Связь эквивалентностей с разбиениями. Легко заметить, что всякому разбиению S соответствует эквивалентность τ_S, задаваемая по правилу: $((x, y) \in \tau_S) \Leftrightarrow (\exists \alpha \in I, x, y \in U_\alpha)$. Обратно, если задана эквивалентность τ на A, то ей можно сопоставить разбиение S_τ, состоящее из подмножеств вида $< x >_\tau := \{y \in A| \quad y\tau x\}$, которые называются классами эквивалентности τ элементов $x \in A$. При этом очевидно, что сопоставляемая такому разбиению эквивалентность, как описано выше, совпадает с исходной эквивалентностью τ. Корректность таких сопоставлений читатель легко докажет самостоятельно.

Пусть теперь τ - некоторая эквивалентность на множестве А.

Определение 2.6. ***Фактормножеством*** *множества A по эквивалентности τ называется множество A_τ всех классов эквивалентности по отношению τ. Сопоставление каждому элементу множества A его класса эквивалентности задает естественное каноническое отображение $\varphi_\tau : A \to A_\tau$, называемое также отображением факторизации множества A по заданной эквивалентности τ.*

Пример 2.1). Зададим на множестве $\mathbb{Z}$ целых чисел эквивалентность, полагая числа n и m эквивалентными тогда и только тогда, когда они имеют одинаковые остатки от деления на 3. Читатель самостоятельно проверит, что это правило действительно определяет эквивалентность. Легко видеть, что образуется три класса эквивалентности, то есть соответствующее фактормножество состоит из трех элементов: $< 0 >, < 1 >, < 2 >$.

Кстати, введенное только что отношение эквивалентности обычно называют эквивалентностью по модулю 3 (или сравнением по модулю 3) и пишут: $n \equiv m(\mod 3)$, если n эквивалентно m. Аналогично определяются отношения эквивалентности по модулю n для любого натурального $n \geq 2$.

Определение 2.7. *Бинарное отношение φ на множестве A называется* ***частичным порядком,*** *если оно удовлетворяет следующим трем условиям:*

1) $\forall a \in A, (a, a) \in \tau$ (рефлексивность);

2) $((a, b) \in \tau) \wedge ((b, a) \in \tau) \Leftrightarrow (a = b)$ (антисимметричность);

3) $((a, b) \in \tau) \wedge ((b, c) \in \tau) \Rightarrow ((a, c) \in \tau)$(транзитивность).

Множество A с заданным на нем частичным порядком называют *частично упорядоченным множеством.*

Определение 2.8. *Бинарное отношение τ называют* ***линейным порядком*** *на множестве A, если τ - частичный порядок, и кроме того, любые два элемента $x, y \in A$ сравнимы, то есть обязательно либо $x\tau y$, либо $y\tau x$.*

Примеры.

2.2) τ - отношение делимости на множестве $\mathbb{N}$, то есть $(x, y) \in \tau$ в точности тогда, когда y делится на x. Нетрудно убедиться, что в данном случае τ - отношение частичного порядка, не являющееся, однако, линейным порядком.

2.3) $\mathbb{Z}$ - множество целых чисел, $\leq$ - естественный порядок. В данном случае $(\mathbb{Z}, \leq)$ - линейно упорядоченное множество.

Операции на множестве.

Определение 2.9. ***n*-арной операцией** *($n \geq 1$) на непустом множестве A называется произвольное отображение из A^n в A. При $n = 2$ операции называются* ***бинарными,*** *а при $n = 1$ - унарными. Под* ***нульарной*** *операцией понимают выделение (фиксацию) в множестве A некоторого элемента, обладающего особыми свойствами.*

Рассматривают также частичные $n-$арные операции, то есть определенные не на всем множестве A, а лишь на некоторой его части.

Примеры.

2.4) Бинарная операция *сложения целых чисел* задается как отображение $S : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, где $\forall(n, m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, S((n, m)) = n + m \in \mathbb{Z}$.

2.5) Операция *умножения рациональных чисел* задается как отображение $M : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, где $\forall(r, q) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}, M((r, q)) = r \cdot q \in \mathbb{Q}$.

2.6) Бинарная операция *вычитания* задается на множестве $\mathbb{Z}$ целых чисел как отображение из $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ в $\mathbb{Z}$, с помощью бинарной операции сложения и унарной операции перехода к противоположному числу: $\forall(a,b)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}, a-b=a+(-b\in\mathbb{Z}$.

2.7) Частичная бинарная операция *деления* рациональных чисел задается как отображение из $\mathbb{Q}\times(\mathbb{Q}\setminus\{0\})$ в $\mathbb{Q}$, с помощью бинарной операции умножения и частичной унарной операции перехода к обратному числу:

$$\forall a\in\mathbb{Q}, \forall b\in\mathbb{Q}\setminus\{0\} \quad a:b=a\cdot b^{-1}.$$

Алгебраические системы.

Определение 2.10 [1]. *Алгебраической системой называется непустое множество (носитель системы) с заданной на нем (конечной или бесконечной) совокупностью операций и отношений (различных арностей).*

Примеры.

2.8) *Алгебраическая система (арифметика) натуральных чисел* - это множество $\mathbb{N}$ (носитель системы) с основными бинарными операциями сложения и умножения, нульарной операцией $1\in\mathbb{N}$ и бинарным отношением полного порядка $\leq$ (то есть линейного порядка с дополнительным свойством *полноты: у всякого непустого подмножества A из $\mathbb{N}$ имеется наименьший элемент $a\in A$*, то есть такой, что для $\forall x\in A, a\leq x$).

2.9) *Алгебраическая система (арифметика) целых чисел* - это множество $\mathbb{Z}$ (носитель системы) с бинарными операциями сложения и умножения, нульарными операциями $0,1\in\mathbb{Z}$, унарной операцией перехода к противоположному числу (то есть числу с противоположным знаком) и бинарным отношением линейного порядка $\leq$.

2.10) *Алгебраическая система (арифметика) рациональных чисел* - это множество $\mathbb{Q}$ (носитель системы) с основными бинарными операциями сложения, умножения, нульарными операциями $0,1\in\mathbb{Q}$, унарной операцией перехода к противоположному числу, частичной унарной операцией перехода к обратному числу, определенной на множестве $\mathbb{Q}\setminus\{0\}$, и бинарным отношением $\leq$ линейного порядка.

Отметим, что в примерах 2.8-2.10 с помощью основных операций сложения и перехода к противоположному элементу образуется операция *вычитания*, а в примере 2.10 (см. также пример 2.7)) - с помощью основных операций умножения и перехода к обратному элементу образуется *частичная бинарная операция деления*, определенная на $\mathbb{Q}\times(\mathbb{Q}\setminus\{0\})$.

Кроме самих операций и отношений, в алгебраических системах важно выделять свойства этих операций и отношений, как индивидуальные, так и связывающие их между собой.

Для удобства и краткости дальнейшего изложения алгебраическую систему рациональных чисел определим следующим эквивалентным образом. Отметим, что в определении 2.11 ниже в свойства 4), 5), 8) и 9) уже

---

[1] Мы даем здесь упрощенное определение алгебраичекой системы, достаточное для целей настоящего пособия. Общее определение см., например, в [4].

включена информация о нульарных и унарных операциях выделения особых элементов носителя 0 и 1 и перехода к противоположным и обратным рациональным числам.

Определение 2.11. ***Алгебраической системой (арифметикой) рациональных чисел*** *называется множество $\mathbb{Q}=\{\frac{m}{n}|m\in\mathbb{Z}, n\in\mathbb{N}\}$ с определенными на нем (и известными читателям) тремя правилами сложения " $+$ ", умножения " $\cdot$ " и сравнения " $\leq$ " двух любых чисел, удовлетворяющими следующим (также известным читателям) 13 свойствам:*

(*)

1) $(a\leq b)\wedge(b\leq c)\Leftrightarrow(a\leq c)$ - транзитивность сравнения;
2) $a+b=b+a$ - коммутативность сложения;
3) $a+(b+c)=(a+b)+c$ - ассоциативность сложения;
4) $\exists 0\in\mathbb{Q}, \forall a\in\mathbb{Q}, a+0=a$; - существование и особое свойство нуля;
5) $\forall a\in\mathbb{Q}, \exists(-a)\in\mathbb{Q}, a+(-a)=0$ - существование и свойство противоположных чисел;
6) $a\cdot b=b\cdot a$ - коммутативность умножения;
7) $a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$ - ассоциативность умножения;
8) $\exists 1\in\mathbb{Q}, \forall a\in\mathbb{Q}, a\cdot 1=a$ - существование и свойство единицы;
9) $\forall a\neq 0, \exists a^{-1}\in\mathbb{Q}, a\cdot(a^{-1})=1$ - существование и свойство взаимно обратных чисел;
10) $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$ - дистрибутивность;
11) $(a\leq b)\wedge(c\in\mathbb{Q})\Leftrightarrow a+c\leq b+c$ - связь сложения и сравнения;
12) $(\forall c>0)\wedge(a\leq b)\Leftrightarrow a\cdot c\leq b\cdot c$ - связь умножения и сравнения;
13) $\forall a\in\mathbb{Q}, \quad \exists n\in\mathbb{N}$, что $a<n$ - аксиома Архимеда.

§3. Множество вещественных чисел. Числовая ось. Сравнение вещественных чисел. Приближение вещественных чисел рациональными.

В курсе математического анализа требуется иметь дело в основном с числовыми множествами. Из школьной программы известны множества $\mathbb{N},\mathbb{Z},\mathbb{Q}$ соответственно натуральных, целых и рациональных чисел. Известно, что $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}$.

Числа нужны для измерений. В частности, для измерений длин отрезков. Однако множество $\mathbb{Q}$ мало для этой цели. В самом деле, например, длина диагонали квадрата со стороной 1 есть, как известно, $\sqrt{2}$ - число, не являющееся рациональным. Наша цель - построение такого более широкого множества чисел, которое было бы достаточно для измерений любых отрезков.

Определение 3.1 *Числовой осью называется прямая, на которой отмечена точка 0 (начало отсчета) и выбран масштаб измерений, то есть отмечена точка, являющаяся концом отрезка, отложенного из точки 0 вправо, длина которого принята за единицу.*

Каждая точка положительной (правой) полуоси числовой оси представляет число, равное длине отрезка, отложенного от начала отсчета до данной точки, отнесенной к длине масштабного „единичного" отрезка, то есть в выбранном масштабе длин. Откладывая от точки 0 вправо последовательно единичные отрезки, получим на числовой оси точки, обозначающие 1,2,3,... - все натуральные числа. Откладывая такие же отрезки влево, получим точки, обозначающие отрицательные числа -1, -2,... . Чтобы найти точку, изображающую положительное рациональное число $\frac{m}{n}$ (m, n взаимно просты), надо m раз отложить вправо от начала отсчета отрезок длины $\frac{1}{n}$. Симметричная точка слева от начала отсчета будет обозначать число $-\frac{m}{n}$. Таким образом, все рациональные числа изображаются точками числовой оси.

Итак, мы видим, что на числовой оси имеются точки, соответствующие длинам любых отрезков. Однако не все эти длины выражаются рациональными числами.

Наша задача - ввести такое более общее понятие чисел, чтобы все точки числовой оси, и соответственно длины любых отрезков, представлялись этими числами.

Определение 3.2. ***Вещественным (действительным)*** *числом называется бесконечная десятичная дробь со знаком „ плюс " или „ минус ", то есть объект вида $\pm a_0, a_1a_2...a_n...$, где $a_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $a_k \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, $k \geq 1$, и для любого номера $n \in \mathbb{N}$ существует хотя бы один номер $k, k > n$, что $a_k < 9$. Множество вещественных чисел будем обозначать $\mathbb{R}$.*

Таким образом, вещественные числа - это все бесконечные десятичные дроби, исключая дроби с 9 в периоде.

Взаимно-однозначное соответствие между точками числовой оси и вещественными числами.

Построим взаимно-однозначное отображение между множеством точек числовой оси и множеством вещественных чисел. Сначала покажем, что каждая точка числовой оси единственным образом представима бесконечной десятичной дробью.

Введем следующее *первое правило*. Пусть a - произвольная точка числовой оси справа от начала отсчета. Положим a_0 - наибольшее число единиц, не превышающее a, то есть точка a_0 находится *не правее* точки a на числовой оси. Затем положим a_1 - наибольшее

число десятых (долей единичного отрезка), для которого рациональная точка a_0, a_1 находится на оси *не правее* точки a. Если уже зафиксировано число $a_0, a_1...a_n$, обозначенное точкой не правее a, то следующий десятичный знак выберем наибольшим из тех, для которых число $a_0, a_1...a_na_{n+1}$ обозначается точкой *не правее* точки a. И так далее до бесконечности. В результате получим бесконечную десятичную дробь $a_0, a_1a_2...a_n...$. Если на некотором шаге мы попали точно в точку a, то все последующие десятичные знаки берутся, конечно, равными нулю. Например, число $\frac{1}{2}$ будет таким способом изображаться дробью $0,50000... = 0,5(0)$ с нулем в периоде. Точке 0 сопоставим бесконечную десятичную дробь $0,0...0...$

Обозначим через $-a$ точку, симметричную точке a относительно точки 0 на числовой оси (то есть такую, что отрезки $[-a;0]$ и $[0;a]$ конгруэнтны). Поставим ей в соответствие бесконечную десятичную дробь, соответствующую точке a, но взятую со знаком минус (то есть положим $-a = -a_0, a_1...a_n...$).

Ясно, что описанное правило позволяет однозначно сопоставить каждой точке числовой оси бесконечную десятичную дробь.

Замечание 3.1. Для рациональных чисел, представимых конечной десятичной дробью, можно было бы рассмотреть еще одно, *второе правило* изображения их бесконечными десятичными дробями. А именно, для рационального числа $a > 0$, представимого конечной десятичной дробью, в описанном выше правиле можно было бы на каждом k-ом шаге выбирать такие наибольшие десятичные знаки a_k, чтобы соответствующая десятичная дробь $a_0, a_1...a_k$ изображалась точкой, находящейся *строго слева* от точки a на положительной полуоси, *никогда с ней не совпадая*. Используя это второе правило, мы получили бы, например, для числа $\frac{1}{2}$ представление: $0,49999... = 0,4(9)$ - бесконечную десятичную дробь с 9 в периоде. Аналогично - для симметричных точек отрицательной полуоси. Таким образом, всякое рациональное число, представимое конечной десятичной дробью $a_0, a_1...a_n$, имеет, вообще говоря, два представления в виде бесконечных десятичных дробей - по первому и по второму правилу: $a_0, a_1...a_n(0)$ и $a_0, a_1...(a_n - 1)(9)$ - с нулем с периоде и с 9 в периоде. В дальнейшем мы ограничимся во всех случаях только первым правилом представления точек числовой оси бесконечными десятичными дробями, не рассматривая тем самым дроби с 9 в периоде. □

Обозначим множество всех точек числовой оси через X. Выше нами построено отображение $\gamma : X \to \mathbb{R}$, ставящее в соответствие каждой точке $a \in X$ неотрицательной полуоси числовой оси бесконечную десятичную дробь $a_0, a_1...a_n... \in \mathbb{R}$, согласно описанному выше первому правилу, и сопоставляющее симметричной a точке $-a$ отрицательной полуоси числовой оси бесконечную десятичную дробь $-a_0, a_1 ... a_n ... \in \mathbb{R}$, то есть $\gamma(-a) = -\gamma(a)$.

Ниже мы покажем, что это отображение γ является взаимно-однозначным, что позволит нам в дальнейшем отождествлять точки числовой оси и соответствующие им бесконечные десятичные дроби (без 9 в периоде). Для этого напомним аксиоматическое определение прямой в геометрии и рассмотрим некоторые дополнительные свойства вещественных чисел.

Прямая в геометрии, аксиомы Гильберта. Для обоснования евклидовой геометрии Д.Гильбертом в начале 20-го века была предложена система из 20 аксиом[2], описывающих основные неопределяемые понятия: точки, прямые и плоскости - и взаимоотношения между ними. Эти 20 аксиом разбиты на 5 групп: 1) 8 аксиом принадлежности, 2) 4 аксиомы порядка, 3) 5 аксиом конгруэнтности, 4) 2 аксиомы непрерывности, 5) одна аксиома о параллельных прямых. Мы не будем здесь перечислять все эти аксиомы. Обратим внимание лишь на одну из них - аксиому непрерывности (носящую имя Кантора), которая формулируется следующим образом.

Аксиома непрерывности Кантора. *Пусть на прямой L задана последовательность (то есть пронумерованная натуральными числами совокупность) отрезков $[A_n; B_n]$, удовлетворяющая следующим двум свойствам:*

1. Каждый следующий отрезок $[A_{n+1}; B_{n+1}]$ является частью предыдущего, то есть $[A_{n+1}; B_{n+1}] \subseteq [A_n; B_n]$;

2. Для любого отрезка $[C; D]$ найдется такой номер n, что $[A_n; B_n] < [C; D]$, то есть отрезок $[A_n; B_n]$ конгруэнтен некоторой части отрезка $[C; D]$.

Тогда на L существует точка M, $M \in [A_n; B_n], n \geq 1$. □

Замечание 3.2. Аксиома Кантора фактически утверждает, что последовательность отрезков, удовлетворяющая свойствам 1)-2), имеет *единственную общую точку*. В самом деле, если существуют две такие различные общие точки a_1, a_2, то и весь соединяющий их отрезок $[a_1; a_2]$ также, очевидно, содержится во всех отрезках $[A_n; B_n], n = 1, 2, ...$ Тогда, взяв $[C; D] < [a_1; a_2]$, мы получим, что, с одной стороны, по аксиоме Кантора найдется такой номер n, что $[A_n; B_n] < [C; D]$. Но с другой стороны, вследствие аксиом конгруэнтности из системы аксиом Гильберта, если $[C; D] < [a_1; a_2]$ и одновременно $[a_1; a_2] \subseteq [A_n; B_n]$, то $[C; D] < [A_n; B_n]$ - противоречие со свойством 2) аксиомы Кантора.

Сравнение вещественных чисел.

Пусть даны два положительных вещественных числа $a = a_0, a_1 ... a_n ...$ и $b = b_0, b_1 ... b_n ....$

Определение 3.3. *Будем говорить, что $a = b$ если выполнены*

[2] см. по этому поводу, например, [5]

равенства: $a_k = b_k$ для всех номеров $k = 0, 1, ...$ Будем говорить, что $a < b$, если существует номер $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ такой, что $a_k = b_k$ при $k < m$, но $a_m < b_m$. Будем считать, что $a > b$ тогда и только тогда, когда $b < a$. Положим также, что всякое отрицательное число меньше нуля, а нуль меньше всякого положительного числа. Для двух отрицательных чисел p, q будем считать, что $p < q$ в точности тогда (то есть тогда и только тогда), когда $|q| < |p|$, где модуль $|a|$ вещественного числа a определяется так:

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0, \\ -a, & a < 0. \end{cases}$$

Объединяя отношения равенства и строгих неравенств, можно рассматривать отношения нестрогих неравенств: $\geq = (>) \vee (=)$, $\leq = (<) \vee (=)$.

Лемма 3.1(транзитивность сравнения.) *Каждое из отношений: $=, <, >, \geq, \leq$ - обладает свойством транзитивности, то есть для любых вещественных чисел a, b, c верно, что $((a\alpha b) \wedge (b\alpha c)) \Rightarrow (a\alpha c)$, где $\alpha \in \{=, <, >, \geq, \leq\}$.*

Доказательство. Проведем рассуждения для случая $\alpha =<$. Остальные случаи рассматриваются аналогично.

Пусть $a = a_0, a_1 ... a_n ..., b = b_0, b_1 ... b_n ..., c = c_0, c_1 ... c_n ...$ - неотрицательные числа, и пусть одновременно $a < b$ и $b < c$. Это означает, что существуют такие номера $m, l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, что $a_k = b_k$ при $k < m$, но $a_m < b_m$, и одновременно $b_i = c_i$, при $i < l$, но $b_l < c_l$. Предположим, что $m \leq l$ (другие случаи рассматриваются совершенно аналогично). Тогда имеем: $a_k = c_k$ при $k < m$, но $a_m < c_m$, то есть $a < c$. □

Установим свойство инъективности построенного выше отображения $\gamma: X \to \mathbb{R}$.

Лемма 3.2. *Отображение γ инъективно.*

Доказательство. Пусть на неотрицательной полуоси числовой оси заданы 2 различные точки: a, b, и точка b расположена правее точки a. Покажем, что тогда $\gamma(a) < \gamma(b)$. Пусть отрезок $[0; c]$ длины $|[0; c]| = 10^{-n}$ (где 0 - отмеченная точка числовой оси) конгруэнтен целому отрезку $[a; b]$ или некоторой его части, то есть $[0; c] \leq [a; b]$. И пусть число $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ - наименьшее из всех возможных, для которых выполнено это условие. Тогда из аксиом конгруэнтности Гильберта следует, что для любой точки $\tilde{a}$, лежащей не правее точки a на положительной полуоси (то есть $[0; \tilde{a}] \leq [0; a]$) и точки $\tilde{b}$ (определяемой единственным образом) такой, что отрезок $[\tilde{a}; \tilde{b}]$ конгруэнтен отрезку $[0; c]$, справедливо, что $[0; \tilde{b}] \leq [0; b]$, то есть точка $\tilde{b}$ лежит не правее точки b. Взяв точку $\tilde{a} = a_0, a_1 ... a_n$, где $a_0, a_1 ... a_n ... = \gamma(a)$ - представление точки a бесконечной десятичной дробью, мы получим, что для представления $b_0, b_1 ... b_n ... = \gamma(b)$ точки b будут справедливы равенства: $a_k = b_k, k < n$, а также неравенство $a_n + 1 \leq b_n$. По определению сравнения вещественных чисел, это означает, что $\gamma(a) < \gamma(b)$. Итак, для положительной полуоси инъективность отображения γ доказана. Согласно определению отображения γ для отрицательной полуоси и правилу сравнения отрицательных вещественных чисел, отсюда следует инъективность отображения γ на всей числовой оси. □

Определение 3.4. *Множество вещественных чисел $A \subseteq \mathbb{R}$ называется* ***ограниченным сверху (снизу)****, если существует такое число $M \in \mathbb{R}$, что $\forall x, x \in A, x \leq M (x \geq M)$.*

Определение 3.5. *Число $\alpha \in \mathbb{R}$ называется* ***супремумом (точной верхней гранью)*** *множества $A, A \subseteq \mathbb{R}$, если 1) $\forall x, x \in A, x \leq \alpha$; 2) $\forall \tilde{\alpha}, \tilde{\alpha} < \alpha, \exists y, y \in A, \tilde{\alpha} < y$. Обозначение: $\alpha = \sup A$.*

Определение 3.6. *Число $\beta \in \mathbb{R}$ называется* ***инфимумом (точной нижней гранью)*** *множества $A, A \subseteq \mathbb{R}$, если 1) $\forall x, x \in A, x \geq \beta$; 2) $\forall \tilde{\beta}, \tilde{\beta} > \beta, \exists y, y \in A, y < \tilde{\beta}$. Обозначение: $\beta = \inf A$.*

Теорема 3.1 (о существовании sup, inf). *Если непустое множество $A, A \subseteq \mathbb{R}$, ограничено сверху (снизу), то существует $\sup A$ (существует $\inf A$).*

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда множество $A = \{a\}$ ограничено снизу числом $m \geq 0$. Покажем, что существует $\inf A \geq 0$. Выберем наименьшую из всех целых частей чисел $a \in A$. Пусть это $\underline{a_0}$. Очевидно, что $a_0 \geq 0$. Теперь у всех чисел из A, имеющих целую часть $\underline{a_0}$, рассмотрим первые десятичные знаки и выберем из них наименьший $\underline{a_1}$. И так далее. На $(n+1)$-ом шаге из всех элементов множества A, у которых первые n десятичных знаков равны $\underline{a_0}, \underline{a_1} ... \underline{a_n}$ (уже выбраны как наименьшие), выберем наименьший $(n+1)$-ый десятичный знак $\underline{a_{n+1}}$. И так до бесконечности. Получим число $\underline{a} = \underline{a_0}, \underline{a_1} ... \underline{a_n}...$. Покажем, что $\underline{a} = \inf A$. Проверим свойства 1) и 2) инфимума.

1) Если предположить, что $\exists y, y = y_0, y_1 ... y_n ..., y \in A, y < \underline{a}$, то для некоторого номера n будет верно, что $y_k = \underline{a_k}$, при $k = 0, 1, ..., n-1$, но $y_n < \underline{a_n}$. Это невозможно в силу выбора десятичного знака $\underline{a_n}$. Итак, для всех $y \in A$ имеем: $\underline{a} \leq y$.

2)Пусть теперь $b = b_0, b_1 ... b_n ... > \underline{a}$. Это означает, что для некоторого номера m равенство $b_k = \underline{a_k}$ верно для всех $k = 0, 1, ..., m-1$, но $b_m > \underline{a_m}$. Однако среди элементов множества A имеются числа вида $y = \underline{a_0}, \underline{a_1} ... \underline{a_{m-1}} \underline{a_m} y_{m+1} ...$, каждое из которых, очевидно, меньше b, так как $y_m = \underline{a_m} < b_m$.

Доказательство для рассматриваемого случая закончено.

Если в множестве A имеются положительные числа, и оно ограничено сверху, то достаточно показать, что имеется супремум у подмножества $\tilde{A}$ всех положительных чисел из A. Он и будет супремумом для всего множества A. Выберем наибольшую целую часть $\overline{a_0}$ из

всех целых частей элементов подмножества $\tilde{A}$. Затем из всех первых десятичных знаков тех чисел из $\tilde{A}$, у которых целая часть равна $\overline{a_0}$, выберем наибольший знак $\overline{a_1}$. И так далее до бесконечности. В итоге получим число $\overline{a} = \overline{a_0}, \overline{a_1} ... \overline{a_n} ...$. Проверим, что для $\overline{a}$ выполнены свойства $\sup A$.

1)Если предположить, что $\exists y, y = y_0, y_1 ... y_n ..., y \in \tilde{A}, y > \overline{a}$, то для некоторого n будет $y_k = \overline{a_k}, k = 0, 1, ..., n-1$, но $y_n > \overline{a_n}$. Это невозможно в силу выбора десятичного знака $\overline{a_n}$. Итак, для всех $y \in A$ имеем: $\overline{a} \geq y$.

2)Пусть теперь $b = b_0, b_1 ... b_n ... < \overline{a}$. Тогда для некоторого номера m равенства $b_k = \overline{a_k}$ верны для $k = 0, 1, ..., m-1$, но $b_m < \overline{a_m}$. Однако в множестве $\tilde{A}$ имеются числа вида $y = \overline{a_0}, \overline{a_1} ... \overline{a_{m-1}}\ \overline{a_m} y_{m+1} ...$, каждое из которых больше b, так как $y_m = \overline{a_m} > b_m$.

Итак, $\overline{a} = \sup \tilde{A}$, а значит, $\overline{a} = \sup A$.

В тех случаях, когда множество A, содержит отрицательные числа и ограничено снизу (сверху) также некоторым отрицательным числом, доказательство легко получается из предыдущих рассуждений, если учесть, что верно следующее утверждение. □

Предложение 3.1. *Пусть ограниченное сверху и снизу множество $A = \{a\}$ состоит из положительных чисел $a > 0$, а множество $-A = \{-a\}$ состоит из элементов множества A, взятых со знаком минус. Тогда $\sup(-A) = -\inf A, \inf(-A) = -\sup A$.* □

Приближение вещественных чисел рациональными.

Лемма 3.3. *Для любого вещественного числа a и для любого $n \in \mathbb{N}$ существуют такие рациональные числа α_1, α_2, что $\alpha_1 \leq a \leq \alpha_2$, и $|\alpha_1 - \alpha_2| \leq \frac{1}{10^n}$.*

Доказательство. Пусть сначала $a > 0, a = a_0, a_1 ... a_n ...$. Положим
$\alpha_1 = a_0, a_1 ... a_n, \alpha_2 = \alpha_1 + \frac{1}{10^n}$. При этом

$$\alpha_2 = \begin{cases} a_0, a_1 ... a_{n-1}(a_n + 1)a_{n+1} ..., & a_n < 9 \\ a_0, a_1 ... a_{l-1}(a_l + 1)0 ... 0 a_{n+1} ..., & a_l < 9, a_{l+1} = ... = a_n = 9 \end{cases}$$

Легко видеть, что требуемые в условии леммы неравенства выполняются. Если a рационально, то достаточно, например, взять $\alpha_1 = \alpha_2 = a$. Если $a < 0$, то следует выбрать рациональные числа β_1, β_2 так, чтобы $\beta_1 \leq |a| \leq \beta_2, |\beta_1 - \beta_2| \leq \frac{1}{10^n}$, и затем положить $\alpha_1 = -\beta_2, \alpha_2 = -\beta_1$. □

Лемма 3.4. *Для любых двух различных вещественных чисел $a, b, a < b$, существует такое рациональное число r, что $a < r < b$.*

Доказательство. Пусть $0 \leq a < b$, $a = a_0, a_1 ... a_n ...$,

$b = b_0, b_1 ... b_n ...$, причем $a_k = b_k, k < n$, и $a_n < b_n$. Положим

$$r = \begin{cases} a_0, a_1 ... a_{n-1}(a_n + 1), & \text{если } a_n + 1 < b_n \\ a_0, a_1 ... a_{n-1} a_n 9 ... 9(a_{n+k} + 1), & \text{если } a_n + 1 = b_n, \\ & a_{n+1} = ... a_{n+k-1} = 9, \\ & a_{n+k} < 9 \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что по построению, $a < r < b$.

Если $a < 0, b > 0$, то достаточно взять $r = 0$. Если $a < b < 0$, то выбрав $q \in \mathbb{Q}$, чтобы было $|b| < q < |a|$, следует взять $r = -q$. □

Рассмотрим теперь свойство сюръективности отображения γ.

Лемма 3.5. *Отображение $\gamma : X \to \mathbb{R}$ сюрвективно.*

Доказательство. Покажем, что каждой бесконечной десятичной дроби (без 9 в периоде) $a = a_0, a_1 ... a_n ... \in \mathbb{R}$ соответствует единственная точка $x \in X$ числовой оси, которая представима этой дробью по первому правилу, описанному выше, то есть $a = \gamma(x)$.

Согласно Лемме 3.3, для дроби a существуют последовательности рациональных чисел $\{\alpha_{1n}\}, \{\alpha_{2n}\}$, такие, что $\alpha_{1n} \le a \le \alpha_{2n}$, $\alpha_{1n} \le \alpha_{1(n+1)}$, $\alpha_{2(n+1)} \le \alpha_{2n}$, и $\alpha_{2n} - \alpha_{1n} = 10^{-n}$, $\quad n = 1, 2, ...$. Более того, можно считать, что $\alpha_{1n} = a_0, a_1 ... a_n \in \mathbb{Q}$. Пусть $x_{1n}, x_{2n} \in X$ точки числовой оси для которых $\gamma(x_{in}) = \alpha_{in}, i = 1, 2; n = 1, 2, ...$. Тогда отрезки $[x_{1n}; x_{2n}]$ удовлетворяют условиям аксиомы непрерывности Кантора. Следовательно, существует единственная точка $x \in X$, общая для всех этих отрезков. Тогда по построению отображения γ очевидно, что $\gamma(x) = a$. □

Из лемм 3.2 и 3.5 следует утверждение следующей теоремы.

Теорема 3.2. *Отображение $\gamma : X \to \mathbb{R}$ взаимно-однозначно.* □

В силу этой теоремы мы будем в дальнейшем отождествлять точки числовой оси и соответствующие бесконечные десятичные дроби (без дробей с 9 в периоде), опуская обозначение отображения γ. То есть будем говорить: „точка a на числовой оси“, - и той же буквой a будем обозначать соответствующую бесконечную десятичную дробь $a = a, a_0 a_1 ..., a_n ...$.

Из теоремы 3.2 следует важный вывод: *длины любых отрезков можно измерять вещественными числами.*

---

§4. Алгебраическая система (арифметика) вещественных чисел и ее полнота. Различные модели ее построения.

Выше мы рассмотрели алгебраическую систему (арифметику) рациональных чисел. Теперь наша цель - построить аналогичную алгебраическую систему, носителем которой являлось бы множество вещественных чисел $\mathbb{R}$, то есть распространить основные операции и отношение сравнения с множества рациональных чисел на множество $\mathbb{R}$ вещественных чисел и доказать справедливость в нем 13 свойств

(*), перечисленных в определении 2.11. Отношение сравнения вещественных чисел уже введено выше. Транзитивность сравнения также доказана (лемма 3.1 выше). Из определения сравнения видно, что оно является линейным порядком. Читатель самостоятельно докажет, что для рациональных чисел это отношение совпадает с известным из школьной программы правилом их сравнения. Теперь введем бинарные операции сложения и умножения вещественных чисел, а также понятие обратного вещественного числа.

Определение 4.1. ***Суммой*** *двух вещественных чисел a и b называется такое вещественное число $a + b$, что для любых рациональных чисел $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$, удовлетворяющих неравенствам*

$$\alpha_1 \le a \le \alpha_2, \beta_1 \le b \le \beta_2, \qquad (**)$$

выполняются неравенства: $\alpha_1 + \beta_1 \le a + b \le \alpha_2 + \beta_2$.

Определение 4.2. ***Произведением*** *двух положительных вещественных чисел a и b называется такое вещественное число $a \cdot b$, что для любых неотрицательных рациональных чисел $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$, удовлетворяющих неравенствам (**), верно, что $\alpha_1 \cdot \beta_1 \le a \cdot b \le \alpha_2 \cdot \beta_2$. В остальных случаях полагают*

$$a \cdot b = \begin{cases} 0, & \textit{если хотя бы одно из чисел } a, b \textit{ равно } 0; \\ |a| \cdot |b|, & \textit{если } a \textit{ и } b - \textit{ одного знака }; \\ -|a| \cdot |b|, & \textit{если числа } a \textit{ и } b - \textit{ разных знаков.} \end{cases}$$

Определение 4.3. *Для положительного вещественного числа a* ***обратным*** *числом называют такое вещественное число a^{-1}, что для всех положительных рациональных чисел α_1, α_2, удовлетворяющих неравенствам $\alpha_1 \le a \le \alpha_2$, выполнены неравенства: $(\alpha_2)^{-1} \le a^{-1} \le (\alpha_1)^{-1}$. Если $a < 0$, то полагают $a^{-1} = -(|a|^{-1})$.*

Отметим, что для рациональных чисел определения 4.1-4.3 совпадают с известными правилами сложения, умножения и обращения рациональных чисел. Предлагаем читателям проверить это самостоятельно.

Противоположное вещественное число было фактически уже определено выше. Для каждого числа $a = a_0, a_1 ... a_n ...$ это та же бесконечная десятичная дробь, но взятая со знаком минус, то есть $-a = -a_0, a_1 ... a_n ...$. Корректность определений 4.1-4.3 устанавливают следующие 3 леммы.

Лемма 4.1. *Для любых двух вещественных чисел a, b их сумма $a + b$ существует и единственна.*

Доказательство. Пусть рациональные числа $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$, удовлетроряют неравенствам (**) для вещественных чисел a, b. Согласно правилам сложения и сравнения и свойствам $(*)$ для рациональных чисел, поскольку $\alpha_1 \le \alpha_2, \beta_1 \le \beta_2$, то $\alpha_1+\beta_1 \le \alpha_2+\beta_1 \le \alpha_2+\beta_2$. Итак, $\alpha_1+\beta_1 \le \alpha_2+\beta_2$. Отсюда видно, что множество $\{\alpha_1+\beta_1\}$ всевозможных „нижних" сумм ограничено сверху любой фиксированной „верхней" суммой вида $\alpha_2+\beta_2$. Тогда по теореме 3.1 существует супремум $S_1 = sup\{\alpha_1+\beta_1\}$. Обозначим $S_1 = a+b$. Это число удовлетворяет определению суммы чисел a и b, так как по определению супремума, $S_1 \ge \alpha_1+\beta_1$ для любой „нижней" суммы $\alpha_1+\beta_1$, и одновременно $S_1 \le \alpha_2+\beta_2$ для любой „верхней" суммы $\alpha_2+\beta_2$.

Осталось доказать единственность суммы $a+b$. Предположим противное, то есть что имеется два различных числа S_1 и S_2, удовлетворяющих определению суммы $a+b$. Тогда, пользуясь леммой 3.4, между ними можно вставить 2 различных рациональных числа r, p, так что $S_1 < r < p < S_2$. Тогда для любой „нижней" суммы $\alpha_1+\beta_1$ и для любой „верхней" суммы $\alpha_2+\beta_2$ будет верно неравенство: $\alpha_1+\beta_1 < r < p < \alpha_2+\beta_2$. Из него следует, что $(\alpha_2+\beta_2)-(\alpha_1+\beta_1) > p-r = q > 0$. Это противоречит лемме 3.3, согласно которой числа $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ можно, в частности, выбрать так, чтобы $\alpha_2-\alpha_1 < \frac{q}{2}, \beta_2-\beta_1 < \frac{q}{2}$. Полученное противоречие доказывает единственность суммы $a+b$ и завершает доказательство леммы 4.1. $\square$

Лемма 4.2. *Для любых двух вещественных чисел a, b их произведение $a \cdot b$ существует и единственно.*

Доказательство. Пусть снова рациональные числа $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$, удовлетроряют неравенствам $(**)$ для вещественных чисел a, b. Доказательство достаточно провести для $a > 0, b > 0$. Поэтому можно ограничиться рассмотрением только положительных рациональных чисел $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$. Из неравенств $(**)$ следует, согласно правилам умножения и сравнения и свойствам $(*)$ для рациональных чисел, что любое „нижнее" произведение $\alpha_1 \cdot \beta_1$ не превосходит любого „верхнего" произведения $\alpha_2 \cdot \beta_2$. Следовательно, множество всех „нижних" произведений ограничено сверху (например, любым „верхним" произведением). Тогда, по теореме 3.1, существует его супремум $P = sup\{\alpha_1 \cdot \beta_1\}$. Нетрудно видеть, что это число P удовлетворяет определению произведения чисел a, b.

Докажем единственность произведения. Предположим противное, то есть что два различных числа $P_1, P_2, P_1 < P_2$, удовлетворяют определению произведения чисел a, b. Тогда, согласно лемме 3.4, между ними можно вставить два различных рациональных числа p, q, так что для любых „нижних" и „верхних" произведений $\alpha_1 \cdot \beta_1, \alpha_2 \cdot \beta_2$ будет верно неравенство: $\alpha_1 \cdot \beta_1 \le P_1 < p < q < P_2 \le \alpha_2 \cdot \beta_2$. Следовательно, будет выполнено неравенство: $\alpha_2 \cdot \beta_2 - \alpha_1 \cdot \beta_1 >$

$q-p = \gamma > 0$. Последнее неравенство противоречит лемме 3.3. В самом деле, выберем и зафиксируем какое-нибудь рациональное число M такое, что $a < M, b < M$ (такое число M существует в силу леммы 3.3.) Рассмотрим такие рациональных числа $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$, удовлетворяющие неравенствам $(**)$ по отношению к a, b, для которых выполнены неравенства: $0 < \alpha_1 \le \alpha_2 \le M, 0 < \beta_1 \le \beta_2 \le M$. Тогда, взяв $\beta_2 - \beta_1 < \frac{\gamma}{2M}, \alpha_2 - \alpha_1 < \frac{\gamma}{2M}$, получим: $\alpha_2 \cdot \beta_2 - \alpha_1 \cdot \beta_1 = \alpha_2(\beta_2-\beta_1) + \beta_1(\alpha_2-\alpha_1) \le M[(\beta_2-\beta_1)+(\alpha_2-\alpha_1)] < \gamma$. Полученное противоречие завершает доказательство. $\square$

Лемма 4.3. *Для любого вещественного числа $a \ne 0$ обратное число a^{-1} существует и единственно.*

Доказательство. Пусть $a \in \mathbb{R}, a > 0$. Зафиксируем положительное рациональное число $M, 0 < M \le a$. Рассмотрим произвольные рациональные числа α_1, α_2, удовлетворяющие неравенствам: $0 < M \le \alpha_1 \le a \le \alpha_2$. Тогда имеем: $0 < (\alpha_2)^{-1} \le (\alpha_1)^{-1} \le (M^{-1})$. Следовательно, множество всех чисел $\{(\alpha_1)^{-1}\}$ ограничено снизу (любым числом $(\alpha_2)^{-1}$). Поэтому по теореме 3.1 существует инфимум этого множества $inf\{(\alpha_1)^{-1}\} = y > 0$. Легко видеть, что это число $y = a^{-1}$ удовлетворяет определению числа, обратного к числу a.

Покажем единственность такого числа. Пусть существует два таких различных числа $y_1, y_2, y_1 < y_2$. Тогда между ними, согласно лемме 3.4, можно вставить два таких различных рациональных числа $p, q, p < q$, что будет справедливо неравенство: $(\alpha_2)^{-1} \le y_1 < p < q < y_2 \le (\alpha_1)^{-1}$ для всех рассматриваемых рациональных чисел α_1, α_2. Следовательно, имеем: $(\alpha_1)^{-1} - (\alpha_2)^{-1} > q - p = \gamma > 0$. Последнее неравенство противоречит лемме 3.3, согласно которой, взяв $\alpha_2 - \alpha_1 < \frac{\gamma \cdot M^2}{2}$, получаем, что $(\alpha_1)^{-1} - (\alpha_2)^{-1} = \frac{\alpha_2-\alpha_1}{\alpha_1 \cdot \alpha_2} < \frac{\gamma \cdot M^2}{2 \cdot \alpha_1 \alpha_2} \le \frac{\gamma}{2} < \gamma$. Полученное противоречие доказывает единственность обратного числа и завершает доказательство. $\square$

Рассмотрим теперь по порядку свойства введенных выше правил сравнения, сложения и умножения вещественных чисел.

Теорема 4.1. *Для введенных выше правил сравнения, сложения и умножения в множестве $\mathbb{R}$ вещественных чисел справедливы 13 свойств $(*)$, перечисленные в определении 2.11.*

Доказательство. Свойство 1) - транзитивность сравнения - уже было доказано выше для множества вещественных чисел (см. лемму 3.1). Перейдем к следующим свойствам.

2) Покажем, что $\forall a, b \in \mathbb{R}, a+b = b+a$. В самом деле, пусть рациональные числа $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ удовлетворяют неравенствам $(**)$ для вещественных чисел a, b. Тогда, по определению суммы, $\beta_1+\alpha_1 = \alpha_1+\beta_1 \le a+b \le \alpha_2+\beta_2 = \beta_2+\alpha_2$. Таким образом, имеем: $\beta_1+\alpha_1 \le a+b \le \beta_2+\alpha_2$. Значит, число $a+b$ удовлетворяет определению

суммы $b+a$. В силу единственности такой суммы, это означает, что $a+b=b+a$, что и требовалось доказать.

3) Аналогично, для тех же чисел $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ и произвольных рациональных чисел γ_1, γ_2, удовлетворяющих неравенствам $\gamma_1 \le c \le \gamma_2$, имеем: $\alpha_1+(\beta_1+\gamma_1)=(\alpha_1+\beta_1)+\gamma_1 \le (a+b)+c \le (\alpha_2+\beta_2)+\gamma_2 = \alpha_2+(\beta_2+\gamma_2)$. Таким образом, получаем: $\alpha_1+(\beta_1+\gamma_1) \le (a+b)+c \le \alpha_2+(\beta_2+\gamma_2)$, то есть число $(a+b)+c$ удовлетворяет определению суммы $a+(b+c)$. А поскольку такая сумма единственна, это означает равенство: $(a+b)+c=a+(b+c)$, что и требовалось доказать.

4)Покажем, что число $0 \in \mathbb{R}$ обладает особым свойством: $\forall a \in \mathbb{R}$, $a+0=a$.

Пусть рациональные числа $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$, удовлетворяют неравенствам (**) для вещественных чисел a и $b=0$. Взяв $\beta_1=\beta_2=0$, имеем: $\alpha_1=\alpha_1+0 \le a+0 \le \alpha_2+0=\alpha_2$. Таким образом, $\alpha_1 \le a+0 \le \alpha_2$. Если предположить, что a и $a+0$ - различные вещественные числа, то между ними можно вставить, согласно лемме 3.4, два различных рациональных числа p, q, разность между которыми $q-p=\varphi>0$. Но тогда разность $\alpha_2-\alpha_1$ не может быть меньше числа φ, что противоречит лемме 3.3, согласно которой эта разность может быть сделана как угодно малой. Свойство 4) доказано.

5) Покажем, что $\forall a \in \mathbb{R}$ верно, что $a+(-a)=0$, то есть число $-a$ является противоположным элементом для a по сложению.

Пусть рациональные числа $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$, удовлетворяют неравенствам (**) для вещественных чисел a и $-a$ соответственно. Тогда $\alpha_1+\beta_1 \le a+(-a) \le \alpha_2+\beta_2$, причем всегда $\alpha_1+\beta_1 \le 0, \alpha_2+\beta_2 \ge 0$. Поэтому ясно, что число 0 удовлетворяет определению суммы $a+(-a)$. В силу единственности суммы вещественных чисел, отсюда немедленно следует, что $0=a+(-a)$, что и требовалось доказать.

6)Покажем, что число 1 имеет следующее особое свойство: $\forall a \in \mathbb{R}$, $a \cdot 1 = a$. Согласно правилу умножения вещественных чисел, достаточно провести доказательство для $a>0$.

Пусть неотрицательные рациональные числа $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$, удовлетворяют неравенствам (**) для вещественных чисел $a>0, 1$. Тогда имеем: $\alpha_1 \cdot \beta_1 \le \alpha_1 \cdot 1 \le a \le \alpha_2 \cdot 1 \le \alpha_2 \cdot \beta_2$. Отсюда видно, что число a удовлетворяет определению произведения $a \cdot 1$. Поэтому, в силу единственности произведения, $a \cdot 1 = a$, что и требовалось доказать.

Аналогично доказываются свойства 7)-10).

11) Докажем следующее свойство (связь сравнения и сложения): $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ верно, что если $a\alpha b$, то $(a+c)\alpha(b+c)$, где $\alpha \in \{=,<,>,\le,\ge\}$; Проведем доказательство для случая $\alpha =<$. Для остальных вариантов значений отношения α доказательство проводится аналогично.

Итак, докажем, что $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$, верно, что если $a<b$, то $(a+c)<(b+c)$. Пусть рациональные числа $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$, удовлетворяют неравенствам (**) для вещественных чисел a, b, и γ_1, γ_2 - произвольные рациональные числа, удовлетворяющие неравенствам $\gamma_1 \le c \le \gamma_2$. Так как $a<b$, то можно выбрать $\alpha_2<\beta_1$, и взять $\gamma_2-\gamma_1<\beta_1-\alpha_2$. Тогда очевидно $\alpha_2+\gamma_2 < \beta_1+\gamma_1$, и мы получаем неравенства: $\alpha_1+\gamma_1 \le a+c \le \alpha_2+\gamma_2 < \beta_1+\gamma_1 \le b+c \le \beta_2+\gamma_2$. Отсюда, по транзитивности сравнения, следует, что $a+c<b+c$, что и требовалось доказать.

12) Рассмотрим теперь связь сравнения и умножения: $\forall a, b, c \in \mathbb{R}, 0<c$, верно, что если $a\alpha b$, то $(a \cdot c)\alpha(b \cdot c)$, где $\alpha \in \{=,<,>,\le,\ge\}$; Проведем доказательство также только для случая $\alpha =<$. Остальные случаи доказываются аналогично.

Итак, пусть $a<b, 0<c$. Покажем, что тогда $a \cdot c < b \cdot c$.

Выберем рациональные числа $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2$ так, чтобы выполнялись цепочки неравенств: $\alpha_1 \le a \le \alpha_2 < \beta_1 \le b \le \beta_2$, $0<\gamma_1 \le c \le \gamma_2$, причем так, чтобы было $\alpha_2 \cdot \gamma_2 < \beta_1 \cdot \gamma_1$. Последнее неравенство всегда можно обеспечить. В самом деле, если хотя бы одно из чисел α_2, β_1 отрицательно, то неравенство $\alpha_2 \cdot \gamma_2 < \beta_1 \cdot \gamma_1$ очевидно для любых γ_1, γ_2 при $0<\gamma_1 \le c \le \gamma_2$. Если же $0<\alpha_2<\beta_1$, то возьмем последовательности рациональных чисел $\{\gamma_{1n}\}, \{\gamma_{2n}\}$, где $0<\gamma_{1n} \le c \le \gamma_{2n}, n \ge 1, \gamma_{2n}-\gamma_{1n} \le 10^{-n}$, и для $\forall n \ge 1$ выполнено неравенство $\gamma_{1n} \le \gamma_{1n+1}$. Это можно сделать в силу леммы 3.3. Зафиксируем, например, γ_{11}. Тогда для числа $\varepsilon=\gamma_{11}\cdot(\frac{\beta_1}{\alpha_2}-1)$ найдется номер $N=N(\varepsilon)$ такой, что $\forall n, n>N$, будет $10^{-n}<\varepsilon=\gamma_{11}\cdot(\frac{\beta_1}{\alpha_2}-1)$. Поэтому будут справедливы неравенства: $\gamma_{2n}-\gamma_{1n} \le 10^{-n} < \gamma_{11}\cdot(\frac{\beta_1}{\alpha_2}-1) \le \gamma_{1n}\cdot(\frac{\beta_1}{\alpha_2}-1)$. Отсюда получим: $\alpha_2 \cdot \gamma_{2n} < \gamma_{1n} \cdot \beta_1$. Тогда будет справедлива и следующая цепочка неравенств: $\alpha_1 \cdot \gamma_{1n} \le a \cdot c \le \alpha_2 \cdot \gamma_{2n} < \beta_1 \cdot \gamma_{1n} \le b \cdot c \le \beta_2 \cdot \gamma_{2n}$. Отсюда, по транзитивности, немедленно следует, что $a \cdot c < b \cdot c$, что и требовалось доказать.

13) Покажем, что для любого вещественного числа a существует натуральное число $N, N>a$ (аксиома Архимеда).

Ясно, что достаточно показать это для положительного вещественного числа. Пусть $a=a_0, a_1 \ldots a_n \ldots > 0$. Положим $N=a_0+1$, тогда очевидно, то $N>a$. $\square$

Таким образом, мы имеем две алгебраические системы с носителями $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{R}$ соответственно и одинаковыми наборами из 3 правил с 13 свойствами (*).

Определение 4.4. *Будем называть два числовых множества A и B с заданным на них набором из 3 правил (сложения, умноже-*

ния и сравнения), обладающих 13 свойствами (*), ***изоморфными*** *друг другу (относительно этих правил и свойств), если имеется взаимно-однозначное отображение между их носителями* $\varphi : A \to B$ *(называемое в этом случае* ***изоморфизмом****), которое согласовано с заданными правилами и свойствами, то есть выполнены следующие условия:*

1) $(\forall a, b \in A)((a < b) \Rightarrow (\varphi(a) < \varphi(b)))$;
2) $(\forall a, b \in A)(\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b))$;
3) $(\forall a, b \in A)(\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b))$;

Определение 4.5. *Будем говорить, что подмножество* $B \subset C$ ***замкнуто*** *относительно заданного на множестве* C *описанного выше набора 3 правил и 13 свойств, если сложение и умножение двух элементов из* B*, а также переход к противоположному или к обратному элементу для элемента из* B *- дают снова элементы из множества* B*, и кроме того, выделенные элементы 0 и 1 также принадлежат* B.

Определение 4.6. *Будем говорить, что множество* C *с описанным выше набором 3 правил и 13 свойств является* ***расширением*** *данного множества* A *с таким же набором из 3 правил и 13 свойств, если существует изоморфизм между множеством* A *с указанным набором правил и свойств и некоторым подмножеством* $B \subset C$*, замкнутым относительно заданных на* C *3 правил с 13 свойствами, но при этом не существует изоморфизма между множеством* A *и всем множеством* C *(относительно указанного набора правил и свойств).*

Выясним теперь вопрос об изоморфности или неизоморфности множеств $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{R}$ рациональных и вещественных чисел с определенными на них описанными выше наборами из 3 правил и 13 свойств.

Заметим, что в определении изоморфности множеств A и B с описанным выше набором 3 правил и 13 свойств, в частности, требуется, чтобы совпадали мощности носителей этих алгебраических систем, то есть чтобы $card(A) = card(B)$. Если это не так, то данные множества заведомо не изоморфны.

Теорема 4.2. $\aleph_0 = card(\mathbb{Q}) < card(\mathbb{R}) = c$.

Доказательство. Сначала докажем, что $card(\mathbb{Q}) = \aleph_0$. Зададим взаимно-однозначное отображение φ из $\mathbb{Q}$ в $\mathbb{N}$ следующим образом - по „высоте ". Пусть $r \in \mathbb{Q}, r = \frac{m}{n}$, где m, n - взаимно просты, $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$. Определим „высоту"числа r как $h(r) = |m| + n$. Будем нумеровать все рациональные числа по возрастанию их „высоты", а в конечном множестве чисел с одинаковой „высотой "- по их есте-

ственному возрастанию. Например

$$\begin{array}{lll} h(r) = 1 \Rightarrow & (r = 0) & \varphi(0) = 1; \\ h(r) = 2 \Rightarrow & (r = -1, 1) & \varphi(-1) = 2, \varphi(1) = 3; \\ h(r) = 3 \Rightarrow & (r = -2, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2) & \varphi(-2) = 4, \varphi(-\frac{1}{2}) = 5, \\ & & \varphi(\frac{1}{2}) = 6, \varphi(2) = 7; \end{array}$$

и так далее. Легко видеть, что определенное таким образом отображение $\varphi : \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$ - является взаимно-однозначным. Следовательно $card(\mathbb{Q}) = card(\mathbb{N}) = \aleph_0$.

Теперь убедимся, что $card(\mathbb{R}) = card((0;1)) = c$. Для этого достаточно задать взаимно-однозначное отображение $\psi : (0;1) \to \mathbb{R}$, например, так: $\psi(x) = ctg(\pi x)$.

Покажем, что $\aleph_0 \le c$. Зададим отображение $\eta : \mathbb{Q} \to \tilde{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{R}$, где $\tilde{\mathbb{Q}}$ - подмножество всех *периодических* бесконечных десятичных дробей, кроме дробей с 9 в периоде. Сопоставим каждому рациональному числу $r = \frac{m}{n}$, где m, n взаимно просты, в качестве $\eta(r)$ это же число в виде бесконечной десятичной дроби, полученной делением m на n „в столбик". Такая процедура исключает появление бесконечных десятичных дробей с 9 в периоде. Кроме того, читателям известно, что всякую периодическую дробь можно однозначно представить в виде обыкновенной дроби вида $\frac{m}{n}$. Поэтому очевидно, что описанное отображение η - взаимно-однозначно. По определению мощности множества, отсюда следует неравенство $\aleph_0 \le c$.

Осталось показать, что $c = card((0;1)) \ne card(\mathbb{N}) = \aleph_0$. Предположим противное. Пусть задано взаимно-однозначное отображение из $(0;1)$ в $\mathbb{N}$, то есть задана нумерация натуральными числами всех чисел из интервала $(0;1)$:

$$\begin{array}{lcl} x_1 & = & 0, x_{11}x_{12}x_{13}...x_{1n}... \\ x_2 & = & 0, x_{21}x_{22}x_{23}...x_{2n}... \\ --- & --- & ------------- \\ x_n & = & 0, x_{n1}x_{n2}x_{n3}...x_{nn}... \\ --- & --- & ------------- \end{array}$$

Но тогда получается противоречие, поскольку вещественное число $b = 0, b_1 b_2 ... b_n ...$, где $b_k \notin \{x_{kk}, 0, 9\}$, $k = 1, 2, ...$, не содержится в занумерованной последовательности $\{x_k\}$, однако очевидно принадлежит интервалу $(0;1)$. Полученное противоречие доказывает, что $c \ne \aleph_0$. А так как выше показано, что $\aleph_0 \le c$, то следовательно $\aleph_0 < c$. $\square$

Из только что доказанной теоремы вытекают следующие 3 утверждения.

Следствие 4.1. *Алгебраическая система с носителем $\mathbb{Q}$, с 3 указанными выше правилами и 13 свойствами, изоморфна алгебраической системе с носителем $\tilde{\mathbb{Q}}$, равным множеству вещественных чисел, представимых бесконечными периодическими дробями (кроме дробей с 9 в периоде), с соответствующими 3 правилами и 13 свойствами.*

Следствие 4.2. *Множества $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{R}$ с описанным выше набором 3 правил и 13 свойств - не являются изоморфными относительно этого набора правил и свойств.*

Следствие 4.3. *Множество $\mathbb{R}$ с указанными правилами и свойствами является расширением множества $\mathbb{Q}$ с этими же правилами и свойствами.*

Определение 4.7. *Множество $\mathbb{A}$ с данным набором правил и свойств называется* ***полным*** *относительно этих правил и свойств, если не существует никакого его расширения (относительно этих правил и свойств).*

Возникает естественный вопрос: существует ли какое-нибудь расширение множества вещественных чисел $\mathbb{R}$ относительно указанного выше набора 3 правил и 13 свойств, или $\mathbb{R}$ является полным по отношению к ним? Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема 4.3 (о полноте множества вещественных чисел). *Множество вещественных чисел $\mathbb{R}$ является полным относительно описанного выше набора из 3 правил и 13 свойств.*$\square$

В конце этой главы мы дадим краткую схему доказательства этой теоремы.

Сформулируем теперь аксиоматический метод определения множества вещественных чисел, который заключается в следующем.

Определение 4.8 (аксиоматическое). ***Множество вещественных чисел*** *- это такое непустое множество $\mathbb{A}$, элементы которого удовлетворяют 17 аксиомам, в качестве которых берутся описанный выше набор 3 правил и 13 свойств, а также аксиома полноты, то есть требование полноты данного множества $\mathbb{A}$ относительно этого набора правил и свойств.*

Конечно, это определение следует понимать с точностью до изоморфизма относительно указанного набора правил и свойств.

Модель Вейерштрасса.

Одной из реализаций множества $\mathbb{A}$, удовлетворяющего указанным 17 аксиомам, является, как было показано выше, множество $\mathbb{R}$ бесконечных десятичных дробей (исключая дроби с 9 с периоде). Эта реализация (модель) арифметики вещественных чисел была предложена К.Вейерштрассом.

Геометрическая модель.

Геометрическая реализация (модель) множества вещественных чисел, удовлетворяющего 17 указанным аксиомам - это множество точек на числовой оси с соответствующими правилами сравнения, сложения и умножения.

Опишем кратко еще две реализации (модели) арифметики вещественных чисел. Одна их них принадлежит Г.Кантору и заключается в следующем.

МОДЕЛЬ КАНТОРА. В множестве рациональных чисел $\mathbb{Q}$ рассматриваются так называемые фундаментальные последовательности и бесконечно малые последовательности (или нуль-последовательности). Определим эти понятия.

Определение 4.9. *Последовательность рациональных чисел $\{r_1, r_2, ..., r_n, ...\}$ (то есть множество, занумерованное натуральными числами, причем r_i не обязательно различны при разных $i, i \geq 1,$) называется* ***фундаментальной****, если для любого рационального числа $\varepsilon > 0$ существует такое натуральное число $N = N(\varepsilon)$, что для всех номеров n, m, где $n > N, m > N$, верно, что $|r_n - r_m| < \varepsilon$.*

Определение 4.10. *Последовательность рациональных чисел $\{r_1, r_2 ..., r_n, ...\}$ называется* ***бесконечно малой (или нуль-последовательностью)****, если для любого рационального числа $\varepsilon > 0$ существует такое натуральное число $N = N(\varepsilon)$, что для всех $n, n > N$, верно, что $|r_n| < \varepsilon$.*

Обозначим через A множество всех фундаментальных последовательностей рациональных чисел. Введем на нем следующее отношение эквивалентности. Скажем, что две фундаментальные последовательности $a, b \in A$, $a = \{a_n\}_{n=1,2,...}, b = \{b_n\}_{n=1,2,...}$, эквивалентны, если их разность $a - b = \{a_n - b_n\}_{n=1,2,...}$ является нуль-последовательностью. Можно показать, что введенное отношение является эквивалентностью. Обозначим эту эквивалентность τ.

Определение 4.11. ***Множество вещественных чисел*** *(по Кантору) - это фактор-множество A/τ, то есть множество классов эквивалентности τ на множестве A фундаментальных последовательностей рациональных чисел.*

Определение 4.12. *В модели Кантора вещественное число $a \in A/\tau$ называется* ***положительным (отрицательным)****, если в этом классе эквивалентности есть положительная (отрицательная) фундаментальная последовательность $\{a_n\}_{n=1,2,...}$, то есть такая, что для некоторого положительного рационального числа $r > 0$ существует номер N такой, что для всех номеров $n, n > N$ верно, что $a_n > r$ (соответственно $a_n < -r$). Вещественное число $a = 0$, если в его классе эквивалентности имеется нуль-последовательность.*

Можно показать, что всякая фундаментальная последовательность является либо положительной, либо отрицательной, либо бесконечно малой. Таким образом, все вещественные числа, по Кантору, делятся на положительные, отрицательные и нуль.

Определение 4.13. *Сумма (произведение) двух вещественных чисел a, b определяется как класс эквивалентности суммы (произведения) двух любых представителей их классов эквивалентности.*

Определение 4.14. ***Противоположное вещественное число** к числу a определяется как класс эквивалентности фундаментальной последовательности, состоящей из чисел, противоположных по знаку членам какой-нибудь последовательности из класса эквивалентности a.*

Определение 4.15. ***Обратное вещественное число** для ненулевого числа a определяется как класс эквивалентности фундаментальной последовательности, состоящей (начиная с некоторого номера n) из чисел, обратных к членам какой-нибудь фундаментальной последовательности из класса эквивалентности a.*

Определение 4.16. *Говорят, что вещественное число a **больше (меньше)** вещественного числа b, если разность $a - b$ есть положительное (отрицательное) число.*

Можно показать, что определения 4.12 - 4.16 корректны, и для описанных операций сложения, умножения и сравнения в модели Кантора выполняются 13 свойств $(*)$.

МОДЕЛЬ ДЕДЕКИНДА. (Является исторически первой.)

Определение 4.17. ***Вещественным числом** (по Дедекинду) называется всякое сечение множества $\mathbb{Q}$ рациональных чисел, то есть такое разбиение $A|B$ множества $\mathbb{Q}$ на подмножества A (нижнее подмножество) и B (верхнее подмножество), что $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = \mathbb{Q}$, и для любых $a \in A, b \in B$ верно, что $a < b$. Будем считать при этом, что у верхнего подмножества B нет наименьшего элемента. (Если такое наименьшее рациональное число обнаружится в верхнем подмножестве B, то перенесем его в нижнее подмножество A, и оно станет там наибольшим.)*

Определение 4.18. *В модели Дедекинда **нулевым сечением** (то есть **нулевым вещественным числом**) является сечение на положительные и неположительные числа, где наибольшим в нижнем подмножестве является число нуль. **Положительным вещественным числом** называется сечение, в нижнем подмножестве которого есть положительное рациональное число. **Отрицательным числом** называется сечение, где в верхнем подмножестве есть отрицательное число.*

Определение 4.19. *Будем говорить, что сечение $A|B$ **больше** сечения $A'|B'$, если $A' \subset A$ (или, эквивалентно, $B \subset B'$). Сечения $A|B$ и $A'|B'$ **равны**, если $A = A'$ и $B = B'$.*

Определение 4.20. ***Суммой (произведением)** сечений $A|B$ и $A'|B'$ называется сечение $(A + A')|(B + B')$ (соответственно $(A \cdot A')|(B \cdot B')$), где $A + A' := \{a + a' | a \in A, a' \in A'\}, A \cdot A' := \{a \cdot a' | a \in A, a' \in A'\}$, аналогично для B, B'.*

Определение 4.21. ***Противоположным** к $A|B$ **сечением** называется сечение $(-B)|(-A)$, где $-A := \{-a | a \in A\}$, аналогично для $-B$.*

Определение 4.22. ***Обратным сечением** для положительного сечения $A|B$ называется сечение $A''|B''$, где $A'' \supset B^{-1}, B'' \supset (A_+)^{-1}$, $A_+ := \{a \in A | a > 0\}, B^{-1} := \{b^{-1} | b \in B\}$. При этом обратное сечение для отрицательного сечения $A|B$ определяется симметрично. То есть для противоположного сечения $(-B)|(-A)$ строится обратное, как описано выше, и затем берется противоположное к этому обратному.*

Можно показать, что определения 4.17-4.22 корректны, и для введенных правил сравнения, сложения и умножения выполнены 13 свойств $(*)$.

В заключение приведем краткую схему доказательства Теоремы 4.3

Схема доказательства теоремы 4.3. Нужно рассмотреть множество сечений уже не рациональных, а всех вещественных чисел. Если предположить, что расширение вещественных чисел $\tilde{\mathbb{R}}$ существует, то существует некоторый его элемент $\alpha, \alpha \notin \mathbb{R}$. Рассмотрим сечение вещественных чисел $A|B$, определенное этим элементом. То есть $A = \{a \in \mathbb{R} | a < \alpha\}, B = \{b \in \mathbb{R} | b > \alpha\}$. Согласно определению сечения, множество A ограничено сверху, а множество B ограничено снизу. Следовательно, существуют $supA = m, infB = M$, причем в силу теоремы 3.1 о точных гранях, это вещественные числа. Согласно свойствам вещественных чисел, числа m, M заключены между сколь угодно близкими вещественными числами (из множеств A и B), поэтому они совпадают: $m = M$, и число m является наибольшим в нижнем классе сечения $A|B$. Тогда $m < \alpha$, а значит, $\alpha - m > 0$. В этом случае существует обратное число $\frac{1}{\alpha - m} \in \tilde{\mathbb{R}}$. Пусть $\gamma > \frac{1}{\alpha - m} > 0$ - некоторое вещественное число (его существование обеспечивается аксиомом Архимеда для $\tilde{\mathbb{R}}$). Но тогда $\alpha - m > \frac{1}{\gamma}$, то есть $\alpha > m + \frac{1}{\gamma}$. Это означает, что в нижнем подмножестве A рассматриваемого сечения число m не является наибольшим. Получено противоречие, которое и доказывает полноту вещественных чисел. $\square$

Глава 2. Числовые последовательности.

§1. Понятие последовательности. Ограниченные и неограниченные, бесконечно малые и бесконечно большие последовательности.

Определение 1.1. *Если любому натуральному числу n поставить в соответствие вещественное число x_n, то полученное (счетное) множество чисел $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ будет называться **числовой последовательностью** и обозначаться $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty}$ или $\{x_n\}$.*

В дальнейшем будем опускать термин "числовая", везде понимая под последовательностью (если не оговорено иное) последовательность вещественных чисел.

Определение 1.2. *Рассмотрим две последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$. Последовательность $\{x_n + y_n\} = \{x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n, \ldots\}$ называется **суммой** $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$; последовательность $\{x_n - y_n\} = \{x_1 - y_1, \ldots, x_n - y_n, \ldots\}$ — их **разностью**; последовательность $\{x_n \cdot y_n\} = \{x_1 \cdot y_1, \ldots, x_n \cdot y_n, \ldots\}$ — **произведением**; последовательность $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\} = \left\{\frac{x_1}{y_1}, \ldots, \frac{x_n}{y_n}, \ldots\right\}$ — **частным** (если $y_k \neq 0$ при всех $k \in \mathbb{N}$).*

Определение 1.3. *Говорят, что последовательность $\{x_n\}$ **ограничена сверху (снизу)**, если существует такое вещественное число M (m), что для всех номеров $n \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство $x_n \leqslant M$ $(x_n \geqslant m)$. Числа M и m называются в этом случае **верхней и нижней гранями последовательности** $\{x_n\}$ соответственно. Последовательность $\{x_n\}$ называется **ограниченной**, если существует вещественное число A такое, что неравенство $|x_n| \leqslant A$ выполняется для всех номеров $n \in \mathbb{N}$.*

Заметим, что последовательность $\{x_n\}$ ограничена тогда и только тогда, когда она ограничена и сверху, и снизу. Действительно, пусть существуют числа M, m такие, что $m \leqslant x_n \leqslant M$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Тогда положим $A = \max\{|m|, |M|\}$. Наоборот, если $|x_n| \leqslant A$ при всех $n \in \mathbb{N}$, то можно взять $m = -A$, $M = A$.

Определение 1.4. *Последовательность $\{x_n\}$ называется **неограниченной**, если для любого вещественного положительного числа A найдется натуральный номер N такой, что выполняется неравенство $|x_N| > A$.*

Последнее определение означает в точности, что последовательность называется неограниченной тогда и только тогда, когда она не является ограниченной.

Определение 1.5. *Последовательность $\{x_n\}$ называется **бесконечно большой**, если для любого положительного вещественного числа A найдется такой натуральный номер N (зависящий от A), что для любого натурального n, $n \geqslant N$, будет выполнено: $|x_n| > A$.*

Замечание 1.1. *Если последовательность $\{x_n\}$ — бесконечно большая, то она, очевидно, является неограниченной. Обратное, вообще говоря, неверно. Например, последовательность $\{x_n\} = \{0, 1, 0, 2, 0, 3, \ldots\}$ — неограниченная, но не бесконечно большая.*

Определение 1.6. *Последовательность $\{x_n\}$ называется **бесконечно малой**, если для любого положительного вещественного числа ε найдется натуральный номер $N = N(\varepsilon)$, такой, что для всех натуральных чисел $n \geqslant N$ будет выполнено: $|x_n| < \varepsilon$.*

Теорема 1.1. *Пусть $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ — бесконечно малые последовательности. Тогда последовательность $\{a \cdot \alpha_n + b \cdot \beta_n\}$, где a, b — произвольные вещественные числа, также является бесконечно малой.*

Доказательство. Выберем произвольное положительное число ε. Так как последовательность $\{\alpha_n\}$ бесконечно малая, то существует такое натуральное число N_1, зависящее от ε, что при $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant N_1$, выполнено: $|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2|a|}$ (если $a \neq 0$). Аналогично $\exists N_2 = N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ такое, что $|\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2|b|}$ (при $b \neq 0$) $\forall n \geqslant N_2$.

Положим $N = \max\{N_1, N_2\}$. Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant N$, будет выполнено: $|a \cdot \alpha_n + b \cdot \beta_n| \leqslant |a| \cdot |\alpha_n| + |b| \cdot |\beta_n| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$. Это означает, по определению, что последовательность $\{a \cdot \alpha_n + b \cdot \beta_n\}$ является бесконечно малой. □

Следствие. *Линейная комбинация любого конечного числа бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность.* □

Теорема 1.2. *Пусть $\{\alpha_n\}$ — бесконечно малая последовательность, $\{x_n\}$ — ограниченная. Тогда последовательность $\{\alpha_n \cdot x_n\}$ также является бесконечно малой.*

Доказательство. Выберем произвольное положительное число ε. Так как последовательность $\{x_n\}$ ограничена, то существует положительное число A такое, что $|x_n| \leqslant A$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Так как последовательность $\{\alpha_n\}$ — бесконечно малая, то существует такое натуральное число N, зависящее от ε, что для любого натурального n, $n \geqslant N$, выполнено: $|\alpha_n| < \varepsilon/A$.

Значит, для любого натурального n, начиная с номера N, будет выполнено: $|\alpha_n \cdot x_n| < A \cdot (\varepsilon/A) = \varepsilon$. Отсюда следует, что последовательность $\{\alpha_n \cdot x_n\}$ является бесконечно малой. □

Теорема 1.3. *Любая бесконечно малая последовательность является ограниченной.*

Доказательство. Пусть $\{\alpha_n\}$ — бесконечно малая последовательность. Возьмем в определении 1.6 $\varepsilon = 1$. Тогда найдется такое натуральное число N, что для любого n, $n \geqslant N$, будет выполнено неравенство $|\alpha_n| < 1$. Положим по определению $A = \max\{1, |\alpha_1|, |\alpha_2|, \dots, |\alpha_{N-1}|\}$. Тогда $|\alpha_n| \leqslant A\ \forall n \in \mathbb{N}$, то есть последовательность $\{\alpha_n\}$ ограничена. □

Следствие. *Произведение любого конечного числа бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность.* □

Теорема 1.4. *Пусть $\{\alpha_n\}$ — бесконечно малая последовательность. Если $\alpha_n = c\ \forall n \in \mathbb{N}$,* [1] *то $c = 0$.*

Доказательство. Предположим противное: $c \neq 0$. Тогда обозначим $\varepsilon = \frac{|c|}{2} > 0$. Так как последовательность $\{\alpha_n\}$ — бесконечно малая, то найдется натуральное число $N = N(\varepsilon)$ такое, что для любого $n \geqslant N$ будет выполнено: $|\alpha_n| < \varepsilon$. Но последнее неравенство означает в точности, что $|c| < \frac{|c|}{2}$, что невозможно. Значит, наше предположение неверно, и $c = 0$. □

Теорема 1.5. *1) Пусть $\{x_n\}$ — бесконечно большая последовательность. Тогда, начиная с некоторого номера n, определено частное $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ которое является бесконечно малой последовательностью.*

2) Если последовательность $\{\alpha_n\}$ — бесконечно малая и $\alpha_n \neq 0$ для любого натурального номера n, то последовательность $\left\{\frac{1}{\alpha_n}\right\}$ является бесконечно большой.

Доказательство. 1) Пусть $\{x_n\}$ — бесконечно большая последовательность. Тогда существует натуральное число N_1 такое, что для любого $n \geqslant N_1$ выполнено: $|x_n| > 1$. Значит, начиная с номера N_1, определено частное $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$. Выберем произвольное положительное число ε. Так как последовательность $\{x_n\}$ является бесконечно большой, то существует натуральное число $N_2 = N_2(\varepsilon)$ такое, что $N_2 \geqslant N_1$ и $|x_n| > 1/\varepsilon\ \forall n \geqslant N_2$. Значит, начиная с номера N_2, выполняется неравенство $\left|\frac{1}{x_n}\right| < \varepsilon$, то есть последовательность $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ является бесконечно малой.

[1] такие последовательности называют стационарными

2) Пусть $\{\alpha_n\}$ — бесконечно малая последовательность и $\alpha_n \neq 0$ для любого натурального номера n. Выберем произвольное положительное число A. Тогда найдется натуральный номер $N = N(A)$ такой, что $|\alpha_n| < \frac{1}{A}$ для любого $n \geqslant N$. Это означает, что, начиная с номера N, верно неравенство $\left|\frac{1}{\alpha_n}\right| > A$, то есть последовательность $\left\{\frac{1}{\alpha_n}\right\}$ является бесконечно большой. □

Упражнение 1.1. *Показать, что произведение бесконечно большой и бесконечно малой последовательностей может являться: а) бесконечно большой последовательностью; б) бесконечно малой последовательностью; в) ограниченной, но не бесконечно малой последовательностью; г) неограниченной, но не бесконечно большой последовательностью.*

§2. Сходящиеся последовательности и их свойства.

Дадим три эквивалентных определения сходящейся последовательности.

Определение 2.1. *Последовательность $\{x_n\}$ называется **сходящейся**, если найдется вещественное число a такое, что последовательность $\{x_n - a\}$ является бесконечно малой. Число a называется в этом случае **пределом** последовательности $\{x_n\}$. Если последовательность не является сходящейся, то говорят, что она **расходится**.*

Определение 2.2. *Последовательность $\{x_n\}$ называется **сходящейся**, если найдется вещественное число a такое, что для любого числа $\varepsilon > 0$ будет существовать натуральный номер N, зависящий от ε, удовлетворяющий условию: $|x_n - a| < \varepsilon\ \forall n \geqslant N$.*

Перепишем последнее неравенство в виде: $-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon \Leftrightarrow a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$. Тогда получим, что последовательность сходится, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется натуральный номер $N = N(\varepsilon)$, удовлетворяющий условию: $x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)\ \forall n \geqslant N$.

Интервал $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ будем называть **$\varepsilon-$окрестностью** точки a и обозначать $B_\varepsilon(a)$.

Определение 2.3. *Последовательность $\{x_n\}$ называется **сходящейся**, если найдется вещественное число a такое, что в любой $\varepsilon-$окрестности точки a содержатся все элементы последовательности $\{x_n\}$, начиная с некоторого номера (зависящего от ε).*

Обозначения: $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$ *или* $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$.

Замечание 2.1. *Пусть* $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$. *Тогда* $\{x_n - a\} = \{\alpha_n\}$, *где* $\{\alpha_n\}$ — *бесконечно малая последовательность. Значит, для любого натурального* n *можем записать:* $x_n = a + \alpha_n$, *где* $\{\alpha_n\}$ — *бесконечно малая последовательность (специальное представление для элементов сходящейся последовательности).*

Определение 2.4. *Будем говорить, что последовательность* $\{x_n\}$ ***стремится к*** $+\infty$ ***(стремится к*** $-\infty$***)*** *при* $n \to +\infty$, *если для любого вещественного* $A > 0$ *найдется номер* N, *зависящий от* A, *такой, что* $x_n > A$ $(x_n < -A)$ $\forall n \geqslant N$.

Обозначения: $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$ $(\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = -\infty)$ *или* $x_n \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$ $(x_n \underset{n\to+\infty}{\to} -\infty)$.

Будем говорить, что последовательность $\{x_n\}$ ***стремится к бесконечности*** *при* $n \to +\infty$, *если для любого вещественного* $A > 0$ *найдется номер* N, *зависящий от* A, *такой, что* $|x_n| > A$ $\forall n \geqslant N$ *(то есть если последовательность* $\{x_n\}$ *является бесконечно большой).*

Обозначения: $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \infty$ *или* $x_n \underset{n\to+\infty}{\to} \infty$.

Теорема 2.1. *Сходящаяся последовательность имеет один и только один предел.*

Доказательство. Предположим противное: $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$ и $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = b$, причем $a \neq b$. В силу специального представления для элементов сходящихся последовательностей можем написать: $x_n = a + \alpha_n$ и $x_n = b + \beta_n$, где $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ — бесконечно малые последовательности. Значит, $\alpha_n - \beta_n = b - a$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Но $\{\alpha_n - \beta_n\}$ — бесконечно малая последовательность (теорема 1.1), а значит, $b - a = 0$ (теорема 1.4). Полученное противоречие доказывает утверждение теоремы. □

Теорема 2.2. *Если последовательность сходится, то она ограничена.*

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$. Тогда существует натуральное число N такое, что $|x_n - a| < 1$ $\forall n \geqslant N$ (положим $\varepsilon = 1$ в определении 2.2). Обозначим $A = \max\{|a| + 1, |x_1|, |x_2|, \ldots, |x_{N-1}|\}$. Получим, что $|x_n| \leqslant A$ при всех $n \in \mathbb{N}$, то есть последовательность $\{x_n\}$ ограничена. □

Замечание 2.2. *Утверждение, обратное к утверждению теоремы 2.2, вообще говоря, неверно. Рассмотрим последовательность* $\{x_n\} = \{1, -1, 1, -1, \ldots\}$. *Она, очевидно, ограничена, но не является сходящейся. Действительно, пусть это не так и существует*

вещественное число a *такое, что* $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$. *Тогда последовательности* $\{x_n - a\}$ *и* $\{x_{n+1} - a\}$ *являются бесконечно малыми. Значит, бесконечно малой является и их разность* $\{x_n - x_{n+1}\}$. *Но* $|x_n - x_{n+1}| = 2$ *для любого натурального* n. *Мы пришли к противоречию. Следовательно, последовательность* $\{x_n\}$ *расходится.*

Следующие три теоремы посвящены арифметическим операциям над сходящимися последовательностями.

Теорема 2.3. *Пусть* $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = b$. *Тогда существует предел суммы и разности этих последовательностей, причем* $\lim\limits_{n\to+\infty} (x_n \pm y_n) = a \pm b$.

Доказательство. В силу специального представления для элементов сходящихся последовательностей имеем: $x_n = a + \alpha_n$, $y_n = b + \beta_n$, где $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ — бесконечно малые последовательности. Значит, $(x_n \pm y_n) - (a \pm b) = \alpha_n \pm \beta_n$. Так как $\{\alpha_n \pm \beta_n\}$ — бесконечно малая последовательность, то, согласно определению 2.1, получаем, что $\lim\limits_{n\to+\infty} (x_n \pm y_n) = a \pm b$. □

Теорема 2.4. *Пусть* $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = b$. *Тогда существует предел произведения этих последовательностей, причем* $\lim\limits_{n\to+\infty} (x_n \cdot y_n) = a \cdot b$.

Доказательство. В силу специального представления для элементов сходящихся последовательностей имеем: $x_n = a + \alpha_n$, $y_n = b + \beta_n$, где $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ — бесконечно малые последовательности. Значит, $(x_n \cdot y_n) - a \cdot b = b \cdot \alpha_n + a \cdot \beta_n + \alpha_n \cdot \beta_n$. Так как $\{b \cdot \alpha_n + a \cdot \beta_n + \alpha_n \cdot \beta_n\}$ — бесконечно малая последовательность (как сумма трех бесконечно малых), то, согласно определению 2.1, получаем, что $\lim\limits_{n\to+\infty} (x_n \cdot y_n) = a \cdot b$. □

Лемма 2.1. *Пусть* $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = b$, *причем* $b \neq 0$. *Тогда, начиная с некоторого номера* N, *определена последовательность* $\left\{\frac{1}{y_n}\right\}$, *которая является ограниченной.*

Доказательство. Выберем $\varepsilon = \frac{|b|}{2}$. Тогда существует номер $N = N(\varepsilon)$ такой, что при всех $n \geqslant N$ имеем:

$$|y_n - b| < \varepsilon \Leftrightarrow -\frac{|b|}{2} < y_n - b < \frac{|b|}{2} \Leftrightarrow b - \frac{|b|}{2} < y_n < b + \frac{|b|}{2}.$$

Значит, $|y_n| > \frac{|b|}{2}$, то есть $y_n \neq 0$ и $\left|\frac{1}{y_n}\right| < \frac{2}{|b|}$ для любого $n \geqslant N$.

Следовательно, последовательность $\left\{\frac{1}{y_n}\right\}$ определена и ограничена при всех $n \geqslant N$. □

Теорема 2.5. *Пусть* $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = b$, *причем* $b \neq 0$. *Тогда существует предел частного этих последовательностей, причем* $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$.

Доказательство. В силу специального представления для элементов сходящихся последовательностей имеем: $x_n = a + \alpha_n$, $y_n = b + \beta_n$, где $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$ — бесконечно малые последовательности. Значит,

$$\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = \frac{x_n \cdot b - y_n \cdot a}{y_n \cdot b} = \frac{(a+\alpha_n)b - (b+\beta_n)a}{y_n \cdot b} = \frac{1}{y_n}\left(\alpha_n - \frac{a}{b}\beta_n\right).$$

Согласно лемме, последовательность $\left\{\frac{1}{y_n}\right\}$ ограничена; последовательность $\{\alpha_n - \frac{a}{b}\beta_n\}$ — бесконечно малая как разность двух бесконечно малых. Значит, и последовательность $\left\{\frac{1}{y_n}\left(\alpha_n - \frac{a}{b}\beta_n\right)\right\}$ является бесконечно малой (как произведение бесконечно малой и ограниченной). Получили, что $\left\{\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}\right\}$ бесконечно мала, то есть что $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$. □

Докажем несколько утверждений, связанных с предельным переходом в неравенствах для последовательностей.

Теорема 2.6. *Пусть* $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$ *и последовательность* $\{x_n\}$ *такова, что* $x_n \geqslant b$ $(x_n \leqslant b)$ *при всех* $n \geqslant N$ *для некоторых* $b \in \mathbb{R}$ *и* $N \in \mathbb{N}$. *Тогда выполнено предельное неравенство* $a \geqslant b$ $(a \leqslant b)$.

Доказательство. Предположим, что $x_n \geqslant b$ при всех $n \geqslant N$, но $a < b$. Обозначим $\varepsilon = b - a > 0$. Тогда найдется такое натуральное число $N_1 = N_1(\varepsilon)$, что $|x_n - a| < \varepsilon\ \forall n \geqslant N_1$. Пусть $N_2 = \max\{N, N_1\}$. Получаем, что для любого $n \geqslant N_2$ выполняется цепочка неравенств

$$|x_n - a| < b - a \Leftrightarrow a - b < x_n - a < b - a \Leftrightarrow 2a - b < x_n < b.$$

Но по условию теоремы $x_n \geqslant b$. Мы пришли к противоречию. Значит, наше предположение неверно и $a \geqslant b$. □

Замечание 2.3. *Из того, что* $x_n > b$ *при всех натуральных* n, *не следует, вообще говоря, что* $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n > b$ *(а лишь* $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n \geqslant b$*). Например,* $1 + \frac{1}{n} > 1$, *но* $\lim\limits_{n\to+\infty} (1 + \frac{1}{n}) = 1$.

Следствие 1. *Пусть* $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ *сходящиеся последовательности и существует натуральный номер* N *такой, что* $x_n \leqslant y_n$ $\forall n \geqslant N$. *Тогда* $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} y_n$.

Доказательство. Так как $x_n \leqslant y_n$, то $(y_n - x_n) \geqslant 0\ \forall n \geqslant N$. Значит, $\lim\limits_{n\to+\infty} (y_n - x_n) \geqslant 0$, то есть $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} y_n$. □

Следствие 2. *Пусть* $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$. *Если для любого натурального* n *верно, что* $x_n \in [b, c]$, *то* $a \in [b, c]$. □

Теорема 2.7 (принцип двусторонней ограниченности). *Пусть* $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \lim\limits_{n\to+\infty} y_n = a$. *Если последовательность* $\{z_n\}$ *такова, что для всех натуральных* $n \geqslant N$ *выполнено двойное неравенство* $x_n \leqslant z_n \leqslant y_n$, *то* $\{z_n\}$ *сходится и* $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = a$.

Доказательство. Из условия теоремы следует, что $x_n - a \leqslant z_n - a \leqslant y_n - a$ при всех $n \geqslant N$. Значит, начиная с номера N, выполнено: $|z_n - a| \leqslant \max\{|x_n - a|, |y_n - a|\}$. Выберем произвольное число $\varepsilon > 0$. Тогда найдется натуральное $N_1 = N_1(\varepsilon)$ такое, что $|x_n - a| < \varepsilon\ \forall n \geqslant N_1$ (так как $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$). Аналогично найдется натуральное $N_2 = N_2(\varepsilon)$ такое, что $|y_n - a| < \varepsilon\ \forall n \geqslant N_2$. Обозначим $N_3 = \max\{N, N_1, N_2\}$. Тогда при всех $n \geqslant N_3$ получим: $|z_n - a| < \varepsilon$. Это и означает, что последовательность $\{z_n\}$ сходится и $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = a$. □

§3. Монотонные последовательности.

Определение 3.1 *Последовательность* $\{x_n\}$ *называется* ***неубывающей (невозрастающей)***, *если неравенство* $x_n \leqslant x_{n+1}$ $(x_n \geqslant x_{n+1})$ *выполнено для любого натурального номера* n. *Если последовательность является неубывающей или невозрастающей, то она называется* ***монотонной***.

Последовательность $\{x_n\}$ *называется* ***возрастающей (убывающей)***, *если для любого натурального номера* n *выполняется неравенство* $x_n < x_{n+1}$ $(x_n > x_{n+1})$.

Теорема 3.1 *Если последовательность* $\{x_n\}$ *не убывает и ограничена сверху (не возрастает и ограничена снизу), то она сходится.*

Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ ограничена сверху и $x_n \leqslant x_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Тогда существует вещественное число $\overline{x} = \sup\{x_n\}$. Значит, $x_n \leqslant \overline{x}\ \forall n \in \mathbb{N}$ и для любого $\varepsilon > 0$ найдется натуральное число $N = N(\varepsilon)$ такое, что $x_N > \overline{x} - \varepsilon$. В силу монотонности $\{x_n\}$ получаем, что для любого $n \geqslant N$ верно: $\overline{x} - \varepsilon < x_N \leqslant x_n \leqslant \overline{x} < \overline{x} + \varepsilon$. Но это означает в точности, что $\overline{x} = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$. Случай, когда последовательность $\{x_n\}$ не возрастает и ограничена снизу, рассматривается аналогично. □

Определение 3.2 *Бесконечная последовательность сегментов* $\{[a_1, b_1], [a_2, b_2], \ldots, [a_n, b_n], \ldots\}$ *называется* ***системой стягивающихся сегментов***, *если выполнены два условия:*

1) $a_n \leqslant a_{n+1}$, $b_n \geqslant b_{n+1}$ *при всех* $n \in \mathbb{N}$ *(то есть* $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \cdots \supset [a_n, b_n] \supset \ldots$*);*

2) $\lim\limits_{n\to+\infty}(b_n - a_n) = 0$.

Следствие из теоремы 3.1 *Пусть* $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{+\infty}$ *— система стягивающихся сегментов. Тогда существует единственная точка* $c \in \mathbb{R}$ *такая, что* $c \in [a_n, b_n]$ $\forall n \in \mathbb{N}$ *(то есть система стягивающихся сегментов имеет единственную общую точку).*

Доказательство. 1) Докажем существование. Так как последовательность $\{a_n\}$ — неубывающая и ограниченная сверху (например, $a_n \leqslant b_1$ $\forall n \in \mathbb{N}$), то она имеет предел. Последовательность $\{b_n\}$ является невозрастающей и ограничена снизу (например, числом a_1), следовательно, она также сходится. Поскольку по условию $\lim\limits_{n\to+\infty}(b_n - a_n) = 0$, то $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = c$. Очевидно, что $c \in [a_n, b_n]$ $\forall n \in \mathbb{N}$ (в силу монотонности обеих последовательностей).

2) Проверим единственность. Пусть числа $c, d \in \mathbb{R}$ таковы, что $c \in [a_n, b_n]$, $d \in [a_n, b_n]$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Предположим, что $c < d$. Тогда неравенство $b_n - a_n \geqslant d - c > 0$ выполнено для всех натуральных n. Значит, $\lim\limits_{n\to+\infty}(b_n - a_n) \geqslant d - c > 0$. Это противоречит условию, следовательно, наше предположение неверно и $c \geqslant d$. Но совершенно аналогичными рассуждениями можно получить, что $d \geqslant c$. Значит, $c = d$. □

Примеры монотонных последовательностей.

1. Число e.

Лемма 3.1 (Бином Ньютона). *Пусть* a, b *— произвольные вещественные числа. Тогда для любого натурального* n *справедливо равенство*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \cdots + C_n^n b^n,$$

где $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$ *—* ***биномиальные коэффициенты***, $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n$ *при всех* $n \in \mathbb{N}$ *(читается:* n*—**факториал**);* $0! = 1$ *по определению.*

Доказательство. Проведем доказательство методом математической индукции.

1) (база индукции). При $n = 1$: $(a+b)^1 = C_1^0 a^1 b^0 + C_1^1 a^0 b^1 = a + b$ — верно.

2) (предположение индукции). Предположим, что утверждение

справедливо для некоторого $n \in \mathbb{N}$: $(a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$.

3) (шаг индукции). Проверим справедливость формулы при $n+1$. Для этого докажем сначала некоторые свойства биномиальных коэффициентов:

$$C_n^0 = \frac{n!}{(n-0)!0!} = 1, \quad C_n^n = \frac{n!}{(n-n)!n!} = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N};$$

$$C_n^k + C_n^{k+1} = \frac{n!}{(n-k)!k!} + \frac{n!}{(n-k-1)!(k+1)!} = \frac{n!(k+1+n-k)}{(n-k)!(k+1)!} =$$

$$= \frac{(n+1)!}{((n+1)-(k+1))!(k+1)!} = C_{n+1}^{k+1} \quad \forall k, n \in \mathbb{N}, \quad k < n.$$

Теперь мы можем записать цепочку равенств: $(a+b)^{n+1} =$

$$= (a+b)^n(a+b) = (C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \cdots + C_n^n b^n)(a+b) =$$

$$= C_n^0 a^{n+1} + C_n^0 a^n b + C_n^1 a^n b + C_n^1 a^{n-1} b^2 + C_n^2 a^{n-1} b^2 + \cdots +$$

$$+ C_n^{n-1} a b^n + C_n^n a b^n + C_n^n b^{n+1} = C_n^0 a^{n+1} + (C_n^0 + C_n^1) a^n b +$$

$$+ (C_n^1 + C_n^2) a^{n-1} b^2 + \cdots + (C_n^{n-1} + C_n^n) a b^n + C_n^n b^{n+1} =$$

$$= C_{n+1}^0 a^{n+1} + C_{n+1}^1 a^n b + \cdots + C_{n+1}^{n+1} b^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k a^{n+1-k} b^k$$

(при переходе к последней строке мы воспользовались доказанными выше свойствами биномиальных коэффициентов). Шаг индукции завершен, лемма полностью доказана. □

Рассмотрим последовательность $\{x_n\} = \left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}$ и докажем, что она является монотонной и ограниченной.

Проверим сначала, что $\{x_n\}$ возрастает. Преобразуем общий член последовательности: $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n =$

$$= 1 + \frac{n!}{(n-1)!1!} \cdot \frac{1}{n} + \frac{n!}{(n-2)!2!} \cdot \frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{n!}{(n-n)!n!} \cdot \frac{1}{n^n} =$$

$$= 1 + \frac{n}{n} + \frac{n(n-1)}{n^2} \cdot \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{n(n-1)\ldots(n-(n-1))}{n^n} \cdot \frac{1}{n!} =$$

$$= 2 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{n-1}{n}\right).$$

Аналогично

$$x_{n+1} = 2 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{n+1}\right) + \cdots +$$

$$+\frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\ldots\left(1-\frac{n}{n+1}\right).$$

Заметим, что последнее слагаемое в выражении для x_{n+1} положительно, поэтому при его отбрасывании все выражение уменьшается. Каждое же из n первых слагаемых в выражении для x_{n+1} больше соответствующего слагаемого в выражении для x_n, поскольку $1-\frac{k}{n} < 1-\frac{k}{n+1}$ при всех натуральных значениях $k < n$. Значит, $x_n < x_{n+1}$.

С другой стороны, так как $1-\frac{k}{n} < 1$, то

$$x_n < 2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\dots+\frac{1}{n!} \leqslant 2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\dots+\frac{1}{2^{n-1}} = 3-\frac{1}{2^{n-1}} < 3$$

(здесь мы воспользовались легко проверяемым неравенством $k! \geqslant 2^{k-1}\ \forall k \geqslant 2$).

Таким образом, мы показали, что последовательность $\{x_n\}$ монотонно возрастает и ограничена сверху числом 3. Значит, она имеет предел. Предел этой последовательности — так называемое число e — одна из фундаментальных математических констант. По определению $e = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Из наших рассуждений видно, что $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \in [2,3]\ \forall n \in \mathbb{N}$, следовательно, $2 \leqslant e \leqslant 3$. На самом деле число e является иррациональным; его можно вычислить с любой точностью. С точностью до 15-го знака после запятой $e = 2,718281828459045\ldots$.

Пример 3.1 *Докажем еще одну формулу для числа e:*

$$e = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\dots+\frac{1}{n!}+\dots = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} \qquad (3.1)$$

Обозначим $a_n = \sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$. *Мы уже знаем, что* $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < a_n\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Покажем, что $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(a_n-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right) = 0$. *Из неравенства Бернулли*[2] *следует, что*

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) \geqslant 1-\frac{1+2+\ldots(k-1)}{n} = 1-\frac{k(k-1)}{2n}.$$

Отсюда

$$0 < a_n-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\right) \leqslant$$

[2] $(1+x_1)(1+x_2)\ldots(1+x_n) \geqslant 1+x_1+x_2+\dots+x_n$, если $x_1,\ldots x_n$ — вещественные числа одного знака, большие -1

$$\leqslant \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}\frac{k(k-1)}{2n} = \frac{1}{2n}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{(k-2)!} \leqslant \frac{1}{2n}\left(1+\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{2^{k-3}}\right) \leqslant \frac{3}{2n}.$$

Так как $\frac{3}{2n} \to 0$ *при* $n \to +\infty$, *то* $\left(a_n-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right) \to 0$, *то есть* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = e$.

Формула (3.1) позволяет вычислять число e с любой степенью точности. Действительно, для любого натурального n справедлива оценка

$$r_n = e-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} = \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k!} = \frac{1}{(n+1)!}\left(1+\frac{1}{n+2}+\ldots\right) <$$

$$< \frac{1}{(n+1)!}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots\right) = \frac{2}{(n+1)!} \qquad (3.2)$$

С помощью последнего неравенства легко показать, что число e является иррациональным. В самом деле, пусть это не так и $e = \frac{p}{q}$, *где* $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$ *(причем* $q \geqslant 2$, *так как из формул (3.1), (3.2) следует, очевидно, что* $2 < e < 3$, *т.е. число e не является целым). Тогда* $q!e = q!\left(2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\dots+\frac{1}{q!}\right)+q!r_q$, *значит,* $q!r_q \in \mathbb{Z}$, *но из (3.2) вытекает, что* $0 < q!r_q < \frac{2q!}{(q+1)!} = \frac{2}{q+1} \leqslant \frac{2}{3} < 1$. *Полученное противоречие показывает, что наше предположение неверно, то есть число e не является рациональным.*

2. Последовательности, заданные рекуррентно.

Рассмотрим последовательность $\{x_n\}$, заданную формулой $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right)$ при всех $n \in \mathbb{N}$ (способ задания последовательности, при котором каждый следующий член вычисляется через предыдущий, называется **рекуррентным**, от латинского recurrens — возвращающийся). Здесь a — любое положительное число, $x_1 > 0$ выбирается произвольно. Покажем, что последовательность $\{x_n\}$ не возрастает и ограничена снизу. Действительно, $x_1 > 0$, следовательно, $x_2 = \frac{1}{2}\left(x_1+\frac{a}{x_1}\right) > 0$. Аналогично $x_n > 0\ \forall n \in \mathbb{N}$. Более того, $x_n = \frac{\sqrt{a}}{2}\left(\frac{x_{n-1}}{\sqrt{a}}+\frac{\sqrt{a}}{x_{n-1}}\right) \geqslant \sqrt{a}$ при $n \geqslant 2$, так как выражение $\frac{x_{n-1}}{\sqrt{a}}+\frac{\sqrt{a}}{x_{n-1}} \geqslant 2$ как сумма двух положительных взаимно обратных величин.

Проверим теперь, что $\{x_n\}$ не возрастает: $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{a}{x_n^2}\right) \leqslant \frac{1}{2}\cdot 2 = 1$, значит, $x_{n+1} \leqslant x_n$ при всех натуральных $n \geqslant 2$ (мы воспользовались доказанной выше оценкой $x_n \geqslant \sqrt{a}\ \forall n \geqslant 2$).

Мы доказали, что последовательность $\{x_n\}$ монотонна и ограничена, следовательно, существует $x = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$. Для того, чтобы найти x, перейдем к пределу в обеих частях рекуррентного соотношения: $x = \lim\limits_{n\to+\infty} x_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right)$. Отсюда получаем уравнение относительно x: $2x^2 = x^2 + a$. Поскольку $x \geqslant \sqrt{a} > 0$, то $x = \sqrt{a}$.

§4. Предельные точки последовательностей.

Определение 4.1. *Пусть $\{x_n\}$ — произвольная последовательность, $k_1, k_2, \ldots, k_n, \ldots$ — натуральные числа, такие, что $k_1 < k_2 < \cdots < k_n < \ldots$ Тогда последовательность $x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots, x_{k_n}, \ldots$ называется* ***подпоследовательностью*** *последовательности $\{x_n\}$ и обозначается $\{x_{k_n}\}$.*

Утверждение 4.1. *Если $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$, то любая подпоследовательность последовательности $\{x_n\}$ также сходится к a.*

Доказательство. Выберем произвольное число $\varepsilon > 0$. Тогда найдется натуральное $N = N(\varepsilon)$ такое, что $|x_n - a| < \varepsilon$ при всех $n \geqslant N$. Пусть $\{x_{k_n}\}$ — подпоследовательность $\{x_n\}$. Так как $k_N \geqslant N$, то можем утверждать, что при всех $n \geqslant N$: $|x_{k_n} - a| < \varepsilon$, то есть $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{k_n} = a$. □

Утверждение 4.2. *Если все подпоследовательности некоторой последовательности $\{x_n\}$ сходятся, то они сходятся к одному и тому же числу a, и, в частности, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$.*

Доказательство. Так как $\{x_n\}$ является по определению собственной подпоследовательностью, то по условию существует $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$. Обозначим этот предел через a. Тогда, согласно предыдущему утверждению, любая подпоследовательность последовательности $\{x_n\}$ также будет сходиться к a. □

Определение 4.2. *Точка $x \in \mathbb{R}$ называется* ***предельной точкой (частичным пределом)*** *последовательности $\{x_n\}$, если в любой окрестности этой точки содержится бесконечно много элементов последовательности $\{x_n\}$.*

Определение 4.3. *Точка $x \in \mathbb{R}$ называется* ***предельной точкой (частичным пределом)*** *последовательности $\{x_n\}$, если существует подпоследовательность $\{x_{k_n}\}$ последовательности $\{x_n\}$ такая, что $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{k_n} = x$.*

Утверждение 4.3. *Определения 4.2 и 4.3 эквивалентны.*

Доказательство. Покажем, что из определения 4.2 следует 4.3. Так как в любой окрестности точки x лежит бесконечно много элементов последовательности $\{x_n\}$, то найдется натуральный номер k_1 такой, что $x_{k_1} \in (x-1, x+1)$. Далее, найдется такое натуральное число $k_2 > k_1$, что $x_{k_2} \in (x - 1/2, x + 1/2)$, и так далее. Итак, для любого $n \in \mathbb{N}$ найдется натуральный номер $k_n > k_{n-1}$ такой, что $x_{k_n} \in (x - 1/n, x + 1/n)$. Получаем, что для любого вещественного $\varepsilon > 0$ существует натуральное $N = [1/\varepsilon] + 1$ такое, что при всех $n \geqslant N$ выполнено: $|x_{k_n} - x| < 1/n \leqslant 1/N < \varepsilon$, то есть $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{k_n} = x$.

Проверим теперь, что из определения 4.3 следует 4.2. Пусть $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{k_n} = x$. Тогда для любого вещественного $\varepsilon > 0$ существует натуральное $N = N(\varepsilon)$ такое, что $x_{k_n} \in B_\varepsilon(x)$ при всех $n \geqslant N$. Но это и означает, что в любой окрестности точки x будет содержаться бесконечно много элементов последовательности $\{x_n\}$. □

Замечание 4.1. *Точка x называется* ***предельной точкой бесконечного множества*** *X, если в любой ее окрестности содержится бесконечно много элементов множества X.*

Предельные точки последовательности и множества ее значений могут, вообще говоря, не совпадать. Например, последовательность $\{1, -1, 1, -1, \ldots\}$ имеет две предельные точки: 1 и -1, в то время как множеством ее значений является конечное множество $\{-1, 1\}$, которое не имеет предельных точек.

Упражнение 4.1. *Проверить, что следующее утверждение является эквивалентным определением предельной точки множества: точка x называется* ***предельной точкой бесконечного множества*** *X, если в любой ее окрестности содержится хотя бы один элемент множества X, отличный от x.*

Упражнение 4.2. *Привести пример последовательности, имеющей бесконечно много предельных точек, и такой, что множество ее значений не имеет (конечных) предельных точек.*

Утверждение 4.4. *Пусть $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$. Тогда $\{x_n\}$ имеет ровно одну предельную точку, равную x.*

Доказательство. Так как $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$, то x — предельная точка последовательности $\{x_n\}$ (определение 4.3). Других предельных точек у $\{x_n\}$ нет (утверждение 4.1). □

Определение 4.4. *Наибольшая (наименьшая) из предельных точек последовательности $\{x_n\}$ называется ее* ***верхним (нижним) пределом*** *и обозначается $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\, x_n$ ($\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\, x_n$). Если множество предельных точек последовательности $\{x_n\}$ не ограничено* *сверху (снизу), то говорят, что* $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\ x_n=+\infty$ ($\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\ x_n=-\infty$).

Теорема 4.1. *У всякой ограниченной последовательности существуют (конечные) верхний и нижний пределы и, в частности, хотя бы одна предельная точка.*

Доказательство. Так как последовательность $\{x_n\}$ ограничена, то существуют вещественные числа m и M такие, что $m\leqslant x_n\leqslant M\ \forall n\in\mathbb{N}$. Обозначим $A=\{x\in\mathbb{R}|$ *существует не более чем конечное число номеров* $k\in\mathbb{N}$ *таких, что* $x_k>x\}$. Множество A не пусто (так как $M\in A$) и ограничено снизу (например, числом $m-1$). Значит, существует число $\bar{x}=\inf A$.

Докажем, что $\bar{x}=\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\ x_n$. Выберем произвольное вещественное $\varepsilon>0$. Так как $\bar{x}=\inf A$, то: 1) $\bar{x}-\varepsilon\notin A$, следовательно, правее точки $\bar{x}-\varepsilon$ на числовой оси лежит бесконечно много элементов последовательности $\{x_n\}$; 2) существует точка $x'\in A$ такая, что $\bar{x}\leqslant x'<\bar{x}+\varepsilon$, значит, правее x' (тем более, правее $\bar{x}+\varepsilon$) на числовой оси лежит не более чем конечное число элементов $\{x_n\}$. Получаем, что в интервале $(\bar{x}-\varepsilon,\bar{x}+\varepsilon)$ содержится бесконечно много элементов последовательности $\{x_n\}$. Это означает по определению, что точка $\bar{x}$ является предельной точкой $\{x_n\}$.

Покажем, что $\bar{x}$ — наибольшая из предельных точек последовательности $\{x_n\}$. Пусть $x>\bar{x}$. Обозначим $\varepsilon=\frac{x-\bar{x}}{2}>0$ (тогда $B_\varepsilon(x)\cap B_\varepsilon(\bar{x})=\emptyset$). Так как окрестность $B_\varepsilon(x)$ целиком лежит правее точки $\bar{x}+\varepsilon$, то в ней содержится не более чем конечное число элементов последовательности $\{x_n\}$. Следовательно, точка x не является предельной точкой $\{x_n\}$. Мы показали, что $\bar{x}=\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\ x_n$. Аналогично проверяется существование нижнего предела последовательности $\{x_n\}$. □

Следствие 1. *Пусть последовательность* $\{x_n\}$ *ограничена,* $\overline{x}=\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\ x_n$, $\underline{x}=\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\ x_n$. *Тогда* $\forall\varepsilon>0\ \exists N=N(\varepsilon)$ *такой, что* $x_n\in(\underline{x}-\varepsilon,\overline{x}+\varepsilon)$ *при всех* $n\geqslant N$.

Доказательство следует из того, что для любого $\varepsilon>0$ правее $\overline{x}+\varepsilon$ (левее $\underline{x}-\varepsilon$) на числовой оси лежит не более чем конечное число элементов последовательности $\{x_n\}$. □

Следствие 2 (Теорема Больцано–Вейерштрасса). *Из любой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.* □

Следствие 3. *Последовательность* $\{x_n\}$ *сходится тогда и только тогда, когда она ограничена и* $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\ x_n=\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\ x_n$.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть последовательность $\{x_n\}$ сходится. Тогда она ограничена (свойство сходящихся последовательностей) и имеет единственную предельную точку (утверждение 4.4).

Достаточность. Пусть последовательность $\{x_n\}$ ограничена и $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\ x_n=\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\ x_n=x$. Тогда для любого $\varepsilon>0$ найдется натуральный номер $N=N(\varepsilon)$ такой, что $x_n\in(x-\varepsilon,x+\varepsilon)$ при всех $n\geqslant N$ (следствие 1). Но это и означает, что $x=\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$. □

Утверждение 4.5. *Пусть последовательность* $\{x_n\}$ *такова, что ее можно разбить на конечное число* M *непересекающихся подпоследовательностей, каждая из которых имеет предел:* $a_1,\dots,a_M$. *Тогда числа* $a_1,\dots,a_M$ *являются предельными точками последовательности* $\{x_n\}$, *и других предельных точек она не имеет.*

Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ разбита на подпоследовательности $\{x_{k_{n_1}}\}$, ..., $\{x_{k_{n_M}}\}$, т.ч. $\lim\limits_{n_1\to+\infty}x_{k_{n_1}}=a_1$, ... , $\lim\limits_{n_M\to+\infty}x_{k_{n_M}}=a_M$, причем эти подпоследовательности не имеют общих точек, а их объединение дает всю последовательность $\{x_n\}$. Тогда, по доказанному выше, числа $a_1,\dots,a_M$ являются предельными точками последовательности $\{x_n\}$. Пусть $a\neq a_i, i=1,\dots,M$. Обозначим $\varepsilon_1=(|a-a_1|)/2>0$, ..., $\varepsilon_M=(|a-a_M|)/2>0$; $\varepsilon=\min\{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_M\}>0$. Поскольку число a_1 является пределом подпоследовательности $\{x_{k_{n_1}}\}$, то все элементы этой подпоследовательности, за исключением конечного числа, принадлежат множеству $B_{\varepsilon_1}(a_1)$. И так далее, наконец, все элементы подпоследовательности $\{x_{k_{n_M}}\}$, за исключением конечного числа, принадлежат множеству $B_{\varepsilon_M}(a_M)$. Значит, в $\varepsilon-$окрестности точки a может лежать лишь конечное число элементов последовательности $\{x_n\}$ (так как по построению эта окрестность не пересекается ни с одним из множеств $B_{\varepsilon_1}(a_1),\dots,B_{\varepsilon_M}(a_M)$), то есть точка a не является предельной точкой $\{x_n\}$. □

Замечание 4.2. *Данное утверждение нельзя, вообще говоря, перенести на случай бесконечного числа подпоследовательностей. Например, рассмотрим последовательность* $\{x_n\}=\{1,1,\frac{1}{2},1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},1,\dots\}$. *Ее можно разбить на счетное число непересекающихся стационарных подпоследовательностей:*
$\{x_{k_1}\}=\{1,1,1,\dots\}$, $\{x_{k_2}\}=\{\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\dots\}$,..., $\{x_{k_n}\}=\{\frac{1}{n},\frac{1}{n},\frac{1}{n},\dots\}$,

... каждая из которых имеет предел: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots \frac{1}{n}, \dots$. *Однако исходная последовательность имеет еще одну предельную точку, отличную от перечисленных. Действительно, из последовательности* $\{x_n\}$ *можно также выделить подпоследовательность* $\{x'_n\} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\}$, *имеющую своим пределом точку* 0.

Пример 4.1. *Найдем точные верхнюю и нижнюю грани, а также верхний и нижний пределы последовательности* $\{x_n\} = \{2, -2, 1+\frac{1}{2}, -1-\frac{1}{2}, \dots, 1+\frac{1}{n}, -1-\frac{1}{n}, \dots\}$: $\inf\{x_n\} = -2$, $\sup\{x_n\} = 2$ *(очевидно);* $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\, x_n = 1$, $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\, x_n = -1$ *(так как последовательность* $\{x_n\}$ *разбивается на две подпоследовательности:* $\{x_1, x_3, x_5, \dots\}$ *и* $\{x_2, x_4, x_6, \dots\}$. *Первая из этих подпоследовательностей сходится к* 1, *вторая — к* -1*).*

Упражнение 4.3. *Доказать, что для любой ограниченной последовательности* $\{x_n\}$ *имеет место цепочка неравенств:* $\inf\{x_n\} \leqslant \underline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\, x_n \leqslant \overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\, x_n \leqslant \sup\{x_n\}$.

§5. Критерий Коши сходимости последовательности.

Определение 5.1. *Последовательность* $\{x_n\}$ *называется* ***фундаментальной или последовательностью Коши****, если* $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, *т.ч.* $\forall n \geqslant N$ *и* $\forall p \in \mathbb{N}$ *выполнено:* $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$.

Лемма 5.1. *Пусть последовательность* $\{x_n\}$ *фундаментальна. Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *найдется натуральный номер* $N = N(\varepsilon)$ *такой, что* $x_n \in (x_N - \varepsilon, x_N + \varepsilon)$ $\forall n \geqslant N$.

Доказательство. Положим в определении фундаментальной последовательности $n = N$. Тогда получим, что $\forall \varepsilon > 0$ найдется $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, т.ч. $\forall p \in \mathbb{N}$ выполнено: $|x_{N+p} - x_N| < \varepsilon$. Это означает, что для любого $n \geqslant N$: $|x_n - x_N| < \varepsilon$, то есть $x_n \in (x_N - \varepsilon, x_N + \varepsilon)$. □

Лемма 5.2. *Любая фундаментальная последовательность ограничена.*

Доказательство. Пусть последовательность $\{x_n\}$ фундаментальна. Тогда положим в утверждении предыдущей леммы $\varepsilon = 1$ и получим, что $\exists N \in \mathbb{N}$, т.ч. $x_n \in (x_N - 1, x_N + 1)$ при всех $n \geqslant N$. Обозначим $A = \max\{|x_1|, \dots, |x_{N-1}|, |x_N| + 1\}$. Тогда $|x_n| \leqslant A$ $\forall n \in \mathbb{N}$, то есть последовательность $\{x_n\}$ ограничена. □

Теорема 5.1. (критерий Коши сходимости последовательности). *Последовательность* $\{x_n\}$ *сходится тогда и только тогда, когда она фундаментальна.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $x = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$. Выберем произвольное $\varepsilon > 0$. Тогда найдется такое натуральное $N = N(\varepsilon)$,

что неравенство $|x_n - x| < \varepsilon/2$ будет выполнено для любого $n \geqslant N$. Тем более, для любого $n \geqslant N$ и для любого $p \in \mathbb{N}$ будет выполнено неравенство $|x_{n+p} - x| < \varepsilon/2$. Значит, $\forall n \geqslant N$ и $\forall p \in \mathbb{N}$:

$$|x_{n+p} - x_n| = |x_{n+p} - x + x - x_n| \leqslant |x_{n+p} - x| + |x_n - x| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon,$$

то есть последовательность $\{x_n\}$ фундаментальна.

Достаточность. Пусть последовательность $\{x_n\}$ фундаментальна. Тогда она ограничена. Значит, согласно теореме Больцано–Вейерштрасса, из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x_{k_n}\}$. Обозначим $x = \lim\limits_{n\to+\infty} x_{k_n}$ и докажем, что $x = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$. Выберем произвольное $\varepsilon > 0$. Так как $x = \lim\limits_{n\to+\infty} x_{k_n}$, то $\exists N_1 = N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, т.ч. $|x_{k_n} - x| < \varepsilon/2$ $\forall n \geqslant N_1$. С другой стороны, поскольку $\{x_n\}$ фундаментальна, то $\exists N_2 = N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, т.ч. неравенство $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon/2$ будет выполняться $\forall n \geqslant N_2$ и $\forall p \in \mathbb{N}$. Положим теперь $N = \max\{N_1, N_2\}$. Тогда для любого $n \geqslant N$ имеем:

$$|x_n - x| = |x_n - x_{k_n} + x_{k_n} - x| \leqslant |x_n - x_{k_n}| + |x_{k_n} - x| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

(так как $k_n \geqslant n$, то можно считать, что $x_{k_n} = x_{n+p}$, где $p = 0$ или $p \in \mathbb{N}$). Получаем по определению, что $x = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$. □

Следствие (критерий Коши расходимости последовательности). *Последовательность* $\{x_n\}$ *расходится тогда и только тогда, когда найдется такое вещественно число* $\varepsilon > 0$, *что для любого натурального номера* N *найдутся натуральное число* $n \geqslant N$ *и натуральное число* p, *для которых будет выполняться неравенство:* $|x_{n+p} - x_n| \geqslant \varepsilon$. □

Глава 3. Задачи

§1. Задачи к первой главе

Задачи к §1 главы 1

1.1. *Показать, что применяя законы двойственности, можно менять местами операции $\cup$ и $\cap$ в свойствах 3)-6) основных операций над множествами.*

Решение. Покажем, например, как поменять местами операции $\cup$ и $\cap$ в свойстве 6). Пусть U – некоторое множество, содержащее одновременно множества A, B и C. В следующей выкладке мы применяем свойства 2), 6) и законы двойственности.

$A \cup (B \cap C) = (U \setminus (U \setminus A)) \cup [(U \setminus (U \setminus B)) \cap (U \setminus (U \setminus C))] = (U \setminus (U \setminus A)) \cup [U \setminus ((U \setminus B) \cup (U \setminus C))] = U \setminus [(U \setminus A) \cap ((U \setminus B) \cup (U \setminus C))] = U \setminus [((U \setminus A) \cap (U \setminus B)) \cup ((U \setminus A) \cap (U \setminus C))] = U \setminus [(U \setminus (A \cup B)) \cup (U \setminus (A \cup C))] = U \setminus [U \setminus ((A \cup B) \cap (A \cup C)] = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Таким образом, доказано, что $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Предлагаем читателям самостоятельно получить аналогичные модификации свойств 3)-5).

1.2. *Доказать: в каждом бесконечном множестве есть счетное подмножество.*

Решение. Пусть задано произвольное бесконечное множество A. Выберем из него один произвольный элемент и обозначим его a_1. Так как A бесконечно, то в нем есть и другие элементы, то есть $A \setminus \{a_1\} \neq \emptyset$. Выберем из подмножества $A \setminus \{a_1\}$ любой элемент и обозначим его a_2. И так далее. Если уже выбраны n элементов $a_1, ..., a_n$, то снова подмножество $A \setminus \{a_1, ..., a_n\} \neq \emptyset$. Поэтому при любом n можно из $A \setminus \{a_1, ..., a_n\}$ выбрать следующий элемент a_{n+1}. Продолжая этот процесс до бесконечности, получим счетное подмножество $\{a_n\}_{n=1,2,...}$, что и требуется.

1.3. *Доказать, что* $card(\mathbb{Z}) = \aleph_0$.

Решение. Зададим соответствие φ между множествами $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{N}$, например, следующим образом: $\varphi(0) = 1, \varphi(k) = 2k, \varphi(-k) = 2k + 1$, $k \in \mathbb{N}$. Проверьте, что отображение φ взаимно-однозначно.

Задачи для самостоятельного решения

1.4. *Доказать свойства 1)-8) основных операций над множествами.*

1.5. *Доказать, что добавление или отбрасывание конечного числа элементов не меняет мощности бесконечного множества.*

Задачи к §2 главы 1 (для самостоятельного решения)

2.1. *Описать классы эквивалентности по модулю 5 на множестве целых чисел.*

2.2. *Обозначим через A множество всех фундаментальных последовательностей рациональных чисел. Введем на нем следующее бинарное отношение τ. Скажем, что две фундаментальные последовательности $a, b \in A$, $a = \{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$, $b = \{b_n\}_{n=1}^{+\infty}$, находятся в отношении τ, если их разность $a - b = \{a_n - b_n\}_{n=1}^{+\infty}$ является нуль-последовательностью. Доказать, что τ – эквивалентность.*

2.3. *Зададим на множестве $\mathbb{N}$ бинарное отношение τ, полагая для элементов $a, b \in \mathbb{N}$, что $a\tau b$ в том и только в том случае, когда a делится на b. Доказать, что отношение τ есть частичный, но не линейный порядок на $\mathbb{N}$.*

Задачи к §3 главы 1

3.1. *Доказать: если* $\{x\} \subseteq \{y\}$, *то* $\sup\{x\} \le \sup\{y\}$.

Решение. Предположим, что $\{x\} \subseteq \{y\}$, но $\sup\{x\} > \sup\{y\}$. По определению точной верхней грани множества $\{x\}$, для $\varepsilon = \frac{1}{2}(\sup\{x\} - \sup\{y\}) > 0$ найдется элемент $x' \in \{x\}$ такой, что $x' > \sup\{x\} - \varepsilon > \sup\{y\}$. Но последнее неравенство противоречит условию $\{x\} \subseteq \{y\}$, в силу которого, очевидно, $x' \le \sup\{y\}$. $\square$

3.2. *Доказать: если* $A = \{x\} \cup \{y\}$, *то* $\sup A = \max(\sup\{x\}, \sup\{y\})$.

Решение. 1-й способ. Предположим, от противного, что $\sup A > \max(\sup\{x\}, \sup\{y\})$. Это означает, что в $A = \{x\} \cup \{y\}$ существует элемент, строго больший и $\sup\{x\}$, и $\sup\{y\}$, а значит, строго больший всех элементов как из $\{x\}$, так и из $\{y\}$. Но множество $\{x\} \cup \{y\}$ состоит только из элементов $\{x\}$ и $\{y\}$. Пришли к противоречию. Если предположить, что $\sup A < \max(\sup\{x\}, \sup\{y\})$, то это означает, что существует элемент из $\{x\}$ (или из $\{y\}$), строго больший всех элементов из объединения $A = \{x\} \cup \{y\}$. Противоречие. Следовательно, единственно возможный случай: $\sup A = \max(\sup\{x\}, \sup\{y\})$.

Например: $\{x\} = \{1; 2; 3\}$, $\{y\} = \{3; 4; 5; 6\}$, тогда $\sup\{x\} = 3$, $\sup\{y\} = 6$, $\{x\} \cup \{y\} = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$, $\sup(\{x\} \cup \{y\}) = 6$.

2-й способ. Так как $\{x\} \in A$, $\{y\} \in A$, то $\sup\{x\} \le \sup A$, $\sup\{y\} \le \sup A$, но тогда $\max(\sup\{x\}, \sup\{y\}) \le \sup A$. Осталось исключить случай $\max(\sup\{x\}, \sup\{y\}) < \sup A$. Действительно, если предположить, что это так, то в объединении двух множеств существует элемент, строго больший любого из элементов $\{x\}$ и $\{y\}$, что невозможно. Полученное противоречие завершает доказательство.

3.3. *Доказать: если* $B = \{x\} \cap \{y\}$, *то* $\sup B \le \min(\sup\{x\}, \sup\{y\})$.

Решение. Пусть $\min(\sup\{x\}, \sup\{y\}) = \sup\{x\}$. Предположим, что $\sup B > \sup\{x\}$. Это означает, что существует элемент пересечения $\{x\} \cap \{y\} \subseteq \{x\}$, строго больший всех элементов множества $\{x\}$. Противоречие. Следовательно, $\sup B \le \sup\{x\}$. Симметричный случай, когда $\min(\sup\{x\}, \sup\{y\}) = \sup\{y\}$, рассматривается аналогично. Утверждение доказано.

Примеры. 1) Строгое неравенство $\sup B < \min(\sup\{x\}, \sup\{y\})$ выполнено, например, при: $\{x\} = (-\infty, \frac{5}{2})$, $\{y\} = \{1; 2; 3\} \Rightarrow \{x\} \cap \{y\} = \{1; 2\}$, $\sup B = 2 < \min(\frac{5}{2}, 3) = \frac{5}{2}$.

2) Равенство $\sup B = \min(\sup\{x\}, \sup\{y\})$ выполнено, например, при: $\{x\} = (1, 3]$, $\{y\} = [2, 4) \Rightarrow \{x\} \cap \{y\} = [2, 3]$, $\sup B = 3 = \min(3; 4)$.

3.4. *Пусть $\{-x\}$ есть множество чисел, противоположных числам из $\{x\}$. Тогда справедливо равенство:* $\inf\{-x\} = -\sup\{x\}$.

Решение. Пусть $\sup\{x\} = \overline{M} < +\infty$, тогда, по определению точной верхней грани, $\forall x \in \{x\}$ $x \leq \overline{M}$ и $\forall \varepsilon > 0$ $\exists x' \in \{x\}$ такой, что $\overline{M} - \varepsilon < x' \leq \overline{M}$. Умножая основные неравенства в этом определении на минус единицу, получаем: $\forall (-x) \in \{-x\}, -x \geq -\overline{M}$ и $-\overline{M} \leq -x' < -\overline{M} + \varepsilon$, где $-x' \in \{-x\}$. По определению точной нижней грани это означает, что число $-\overline{M}$ есть точная нижняя грань $\{-x\}$, то есть $\inf\{-x\} = -\overline{M}$. Утверждение доказано для случая конечного $\overline{M}$. Если $\overline{M} = +\infty$, то множество $\{x\}$ не ограничено сверху, но тогда множество $\{-x\}$ не ограничено снизу, а значит $\inf\{-x\} = -\infty$. Утверждение полностью доказано.

3.5 *Доказать: если $\{x + y\}$ есть множество всех сумм $x + y$, где $x \in \{x\}, y \in \{y\}$, то справедливо равенство:* $\inf\{x+y\} = \inf\{x\} + \inf\{y\}$.

Решение. Пусть $\inf\{x\} = m' > -\infty$, $\inf\{y\} = m'' > -\infty$. Тогда, по определению точной нижней грани, $\forall x \in \{x\}$ и $\forall y \in \{y\}$ верно, что $x \geq m'$, $y \geq m''$, а также $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x' \in \{x\}$ и $\exists y' \in \{y\}$ такие, что $m' \leq x' < m' + \frac{\varepsilon}{2}$, $\quad m'' \leq y' < m'' + \frac{\varepsilon}{2}$. Отсюда получаем, что $\forall x + y \in \{x + y\}, x + y \geq m' + m''$, а также что $\forall \varepsilon > 0$ $\exists (x' + y') \in \{x + y\}$ такой, что $m' + m'' \leq x' + y' < m' + m'' + \varepsilon$. Последние неравенства означают, что число $m' + m''$ является точной нижней гранью множества $\{x + y\}$, т.е. $\inf\{x + y\} = \inf\{x\} + \inf\{y\}$.

Случай, когда хотя бы одна из точных граней $\inf\{x\}, \inf\{y\}$ равна $-\infty$, рассмотрите самостоятельно.

3.6. *Доказать: если $\{xy\}$ - множество всех произведений xy, где $x \in \{x\}$, $y \in \{y\}$, и множества $\{x\}, \{y\}$ состоят из положительных чисел, то верно равенство:* $\sup\{xy\} = \sup\{x\} \cdot \sup\{y\}$.

Решение. Пусть $\sup\{x\} = M' < +\infty$, $\sup\{y\} = M'' < +\infty$. По определению точной верхней грани, $\forall x \in \{x\}$ и $\forall y \in \{y\}$ верно, что $0 \leq x \leq M'$, $\quad 0 \leq y \leq M''$, а также для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ существуют $x' \in \{x\}$ и $y' \in \{y\}$ такие, что $0 < M' - \varepsilon < x' \leq M'$, $\quad 0 < M'' - \varepsilon < y' \leq M''$. Отсюда, перемножая неравенства, получаем, что $\forall xy \in \{xy\}, 0 \leq xy \leq M'M''$, а также $0 < (M' - \varepsilon)(M'' - \varepsilon) = M'M'' - (\varepsilon M' + \varepsilon M'' - \varepsilon^2) < x'y' \leq M'M''$. Так как величина $\varepsilon M' + \varepsilon M'' - \varepsilon^2$ может быть сделана сколь угодно малой, то

последние неравенства означают, что число $M'M''$ является точной верхней гранью множества $\{xy\}$, т.е. $\sup\{xy\} = \sup\{x\} \cdot \sup\{y\}$.

Случаи, когда точные грани $\sup\{x\}$, $\sup\{y\}$ обращаются в $+\infty$ или 0, рассмотрите самостоятельно.

3.7. *Доказать: если $\{x\}$ множество положительных чисел, причем $\inf\{x\} > 0$, то верно, что:* $\inf\left\{\frac{1}{x}\right\} = \frac{1}{\sup\{x\}}$.

Решение. Пусть $\sup\{x\} = M < +\infty$. По условию, $M > 0$. По определению точной верхней грани, $\forall x \in \{x\}, 0 < x \leq M$, и для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ существует $x' \in \{x\}$ такой, что $0 < M - \varepsilon < x' \leq M$. Обращая эти неравенства, получаем, что $\forall \frac{1}{x} \in \left\{\frac{1}{x}\right\}, \frac{1}{M} \leq \frac{1}{x} < +\infty$, а также для достаточно малого $\varepsilon > 0$ существует $\frac{1}{x'} \in \left\{\frac{1}{x}\right\}$ такой, что $\frac{1}{M} \leq \frac{1}{x'} < \frac{1}{M-\varepsilon} = \frac{1}{M} + \frac{\varepsilon}{M(M-\varepsilon)}$. Так как величина $\frac{\varepsilon}{M(M-\varepsilon)}$ может быть сколь угодно малой, то последние неравенства означают, что $\frac{1}{M}$ является точной нижней гранью множества $\left\{\frac{1}{x}\right\}$, т.е. $\inf\left\{\frac{1}{x}\right\} = \frac{1}{\sup\{x\}}$.

В случае $\sup\{x\} = +\infty$ имеем $\inf\left\{\frac{1}{x}\right\} = 0 = \frac{1}{\sup\{x\}}$, и, таким образом, доказываемое равенство также выполняется.

3.8. *Показать, что множество всех правильных рациональных дробей $\frac{m}{n}$, где m и n - натуральные числа и $0 < m < n$, не имеет наименьшего и наибольшего элементов. Найти точные нижнюю и верхнюю грани этого множества.*

Решение. Из очевидных неравенств $0 < \frac{2m-1}{2n} < \frac{m}{n} < \frac{2m+1}{2n} < 1$ следует, что множество всех правильных положительных рациональных дробей не имеет ни наименьшего, ни наибольшего элементов. Действительно, из этих неравенств видно, что для любого элемента $\frac{m}{n}$ можно построить правильную рациональную дробь как меньшую, так и большую его.

Найдем точные грани. Зафиксируем любое сколь угодно малое $\varepsilon > 0$ и покажем, что найдется рациональное положительное число, меньшее ε. Так, взяв произвольное натуральное m, будем увеличивать n до тех пор, пока не получим $0 < \frac{m}{n} < \varepsilon$ (достаточно взять, например, $n = [\frac{m}{\varepsilon}] + 1$). Это означает, что $\inf\left\{\frac{m}{n}\right\} = 0$. С другой стороны, для произвольного $\varepsilon > 0$ легко подобрать правильную дробь, большую $1 - \varepsilon$. Например, взяв произвольное $k \in \mathbb{N}$, будем увеличивать $m \in \mathbb{N}$ до тех пор, пока не будет выполняться неравенство $1 - \varepsilon < \frac{m}{m+k} < 1$ (достаточно взять $m > \frac{k(1-\varepsilon)}{\varepsilon}$). Это означает, что $\sup\{\frac{m}{n}\} = 1$.

3.9. *Найти* $\inf\{X\}$ *и* $\sup\{X\}$, *если* $X = \left\{\frac{1}{2} \pm \frac{n}{2n+1}\right\}$, *где* $n = 1, 2, \ldots$

Решение. Представим множество X в виде объединения двух множеств: $X_1 = \{\frac{1}{2} + \frac{n}{2n+1}\}$ и $X_2 = \{\frac{1}{2} - \frac{n}{2n+1}\}$. Ясно, что $\sup\{X\} =$

$\sup\{X_1\}$, $\inf\{X\} = \inf\{X_2\}$. Из следующих очевидных неравенств $\frac{1}{2} - \frac{1}{2(n+1)} = \frac{n}{2(n+1)} < \frac{n}{2n+1} < \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$ видно, что величину $\frac{n}{2n+1}$ с ростом n можно сделать сколь угодно близкой к числу $\frac{1}{2}$. Предположим поэтому, что $\inf\{X\} = 0$, а $\sup\{X\} = 1$ и докажем это более строго. Рассмотрим для любого $\varepsilon > 0$ следующие два неравенства: $0 < \frac{1}{2} - \frac{n}{2n+1} < \varepsilon$, $\quad 1 - \varepsilon < \frac{1}{2} + \frac{n}{2n+1} < 1$. Решив их относительно n, получим, что оба неравенства выполняются при $n > \frac{1-2\varepsilon}{4\varepsilon}$. Это означает, по определению точных граней, что $\inf\{X\} = 0$, $\sup\{X\} = 1$.

Задачи для самостоятельного решения

3.10. *Пусть* $\{x\} \subseteq \{y\}$. *Доказать, что* $\inf\{x\} \geq \inf\{y\}$.

3.11. *Пусть* $A = \{x\} \cup \{y\}$. *Доказать:* $\inf A = \min(\inf\{x\}, \inf\{y\})$.

3.12. *Пусть* $B = \{x\} \cap \{y\}$. *Доказать:* $\inf B \geq \max(\inf\{x\}, \inf\{y\})$.

3.13. *Пусть* $\{-x\}$ *есть множество чисел, противоположных числам* $x \in \{x\}$. *Доказать, что* $\sup\{-x\} = -\inf\{x\}$.

3.14. *Пусть* $\{x + y\}$ *есть множество всех сумм* $x + y$, *где* $x \in \{x\}$, $y \in \{y\}$. *Доказать, что* $\sup\{x + y\} = \sup\{x\} + \sup\{y\}$.

3.15. *Пусть* $\{xy\}$ *есть множество всех произведений* xy, *где* $x \in \{x\}$, $y \in \{y\}$, *причем* $x \geq 0$, $y \geq 0$. *Доказать, что* $\inf\{xy\} = \inf\{x\} \cdot \inf\{y\}$.

3.16. *Пусть* $\{x\}$ *есть некоторое непустое множество положительных чисел, причем* $\inf\{x\} > 0$. *Доказать, что* $\sup\left\{\frac{1}{x}\right\} = \frac{1}{\inf\{x\}}$.

3.17. *Найти точные грани множества натуральных чисел* $\mathbb{N}$.

ОТВЕТ: $\inf \mathbb{N} = 1$, $\sup \mathbb{N} = +\infty$.

3.18. *Доказать, что для числовой последовательности* $x_n = \frac{1}{n}$ *верны равенства* $\inf\{x_n\} = 0$, $\quad \sup\{x_n\} = 1$.

3.19. *Доказать:* $\inf(a, b) = \inf[a, b] = a$, $\sup(a, b) = \sup[a, b] = b$.

Замечание. Различие состоит в том, что в случае интервала (a, b) точные грани a и b не принадлежат ему, а в случае отрезка $[a, b]$ – принадлежат.

Задачи к §4 главы 1 (для самостоятельного решения)

4.1. *Доказать, что из 13 свойств определения 2.11 следует, что особые элементы* $0, 1$, *а также противоположный элемент* $-a$ *для каждого* $a \in A$ *и обратный элемент* a^{-1} *для каждого* $a \in A \setminus \{0\}$ *определены единственным образом. Здесь* $A = \mathbb{Q}$ *или* $A = \mathbb{R}$.

4.2. *Доказать справедливость для вещественных чисел следующих свойств 7)-10) из совокупности 13 свойств (*), перечисленных в определении 2.11:*

7) $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $a \cdot b = b \cdot a$; $\quad$ *8)* $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$; $\quad$ *9)* $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$; $\quad$ *10)* $\forall a \in \mathbb{R}, a \neq 0$, $a \cdot a^{-1} = 1$, *т.е.* a^{-1} *является обратным к* a *элементом по умножению.*

4.3. *Доказать, что из определения 4.4 следует, в частности, что* $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = 1$, $\varphi(-a) = -\varphi(a)$, *а также для* $a \neq 0$, $\varphi(a^{-1}) = (\varphi(a))^{-1}$.

4.4. *Доказать, что если в классе эквивалентности по отношению* τ, *описанному выше в задаче 2.2, имеется хотя бы одна положительная (соответственно отрицательная, или бесконечно малая) фундаментальная последовательность, то и все остальные фундаментальные последовательности из этого класса эквивалентности – тоже положительные (соответственно отрицательные, или бесконечно малые).*

4.5. *Доказать, что фундаментальная последовательность рациональных чисел является либо положительной, либо отрицательной, либо бесконечно малой.*

4.6. *а) Доказать корректность определений суммы, произведения, противоположного и обратного элементов, а также правила сравнения вещественных чисел в модели Кантора. б) Доказать, что для этих правил выполнены 13 свойств, перечисленных в определении 2.11.*

4.7. *Доказать корректность определений правил сложения, сравнения и умножения вещественных чисел в модели Дедекинда и показать, что для них выполняются 13 свойств (*) из определения 2.11.*

§2. Задачи ко второй главе

Задачи к §1 главы 2

1.1. *Доказать, что* $\{x_n\}$ *есть бесконечно малая последовательность, указав для* $\forall \varepsilon > 0$ *натуральный номер* $N = N(\varepsilon)$ *такой, что* $|x_n| < \varepsilon$ *при* $n \geq N$, *если*

$$\text{а) } x_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}; \quad \text{б) } x_n = \frac{1}{n!}.$$

Доказательство. а) Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и рассмотрим неравенство $|x_n| = \left|\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$. Легко видеть, что оно верно при $n > \frac{1}{\varepsilon}$, и следовательно, при $n \geq N(\varepsilon) = [\frac{1}{\varepsilon}] + 1$. По определению предела отсюда следует, что $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 0$.

б) Аналогично пункту а), для любого $\varepsilon > 0$ имеем:

$$|x_n| = \left|\frac{1}{n!}\right| = \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}} < \varepsilon.$$

Отсюда находим: $n > 1 + \log_2(\frac{1}{\varepsilon})$ и $N(\varepsilon) = 2 + [\log_2(\frac{1}{\varepsilon})]$.

1.2. *Доказать, что последовательность* $\{x_n\}$, *где*

$$\text{а) } x_n = (-1)^n n; \quad \text{б) } x_n = 2^{\sqrt{n}},$$

имеет бесконечный предел при $n \to \infty$, *определив для произвольного* $E > 0$ *натуральный номер* $N = N(E)$ *такой, что* $|x_n| > E$ *при* $n \geq N$.

Доказательство. а) Для произвольно выбранного $E > 0$ составим неравенство $|x_n| = |(-1)^n n| = n > E$. В качестве $N(E)$ можно взять, например, $[E] + 1$.

б) Поступая аналогично пункту а), для произвольного $E > 0$ имеем $|x_n| = |2^{\sqrt{n}}| = 2^{\sqrt{n}} > E$, откуда находим $n > \log_2^2 E$. В качестве $N(E)$ можно взять $[\log_2^2 E] + 1$.

1.3. *Показать, что последовательность $\{x_n\}$, где $x_n = n^{(-1)^n}$, не ограничена, однако не является бесконечно большой при $n \to \infty$.*

Решение. Если бы $\{x_n\}$ была ограничена, то любая ее подпоследовательность также была бы ограничена. Однако подпоследовательность с четными номерами $\{x_{2k}\}$, где $x_{2k} = 2k$, $k \in \mathbb{N}$, является бесконечно большой. Следовательно, $\{x_n\}$ – не ограничена. С другой стороны, $\{x_n\}$ не является бесконечно большой, так как существует подпоследовательность $\{x_{2k+1}\}$, где $x_{2k+1} = \frac{1}{2k+1}$, $k \in \mathbb{N}$, сходящаяся к нулю, что противоречит определению бесконечно большой последовательности.

Задачи для самостоятельного решения

1.4. *Доказать, что $\{x_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, есть бесконечно малая последовательность, указав для произвольно выбранного $\varepsilon > 0$ натуральный номер $N = N(\varepsilon)$ такой, что $|x_n| < \varepsilon$ при $n \geq N$, если*

$$\text{а) } x_n = \frac{2n}{n^3+1}; \quad \text{б) } x_n = (-1)^n \cdot 0,999^n.$$

ОТВЕТ: а) $N(\varepsilon) = \left[\sqrt{\frac{2}{\varepsilon}}\right] + 1$; б)$N(\varepsilon) = [\log_{0.999} \varepsilon] + 1$.

1.5. *Доказать, что последовательность $\{x_n\}$, где $x_n = \lg(\lg n)$, $n \geq 2$, является бесконечно большой, определив для произвольного $E > 0$ номер $N = N(E) \in \mathbb{N}$ такой, что $|x_n| > E$ при $n \geq N$.*

ОТВЕТ: $N(\varepsilon) = [10^{10^E}] + 1$.

Задачи к §2 главы 2

2.1. *Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$, определив для каждого $\varepsilon > 0$ число $N = N(\varepsilon)$ такое, что $|\frac{n}{n+1} - 1| < \varepsilon$ при $n \geq N$.*

Доказательство. Для любого $\varepsilon > 0$ имеем: $\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \left|\frac{-1}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1} < \varepsilon$ при $n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$, и следовательно, при $n \geq N(\varepsilon) = [\frac{1}{\varepsilon}]$. Это и означает, по определению предела, что число 1 является пределом данной последовательности.

2.2. *Сформулировать с помощью неравенств следующие определения:* а) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$, б) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$, в) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

Решение. а) $\forall E > 0\ \exists N(E) : \forall n \geq N(E) \quad |x_n| > E$;

б) $\forall E < 0\ \exists N(E) : \forall n \geq N(E) \quad x_n < E$;

в) $\forall E > 0\ \exists N(E) : \forall n \geq N(E) \quad x_n > E$.

2.3. *Существует ли конечный предел у числовой последовательности $\{a_n\}$, заданной рекуррентно: $a_1 = a_2 = 2$, $a_{n+2} = a_{n+1} + \frac{1}{a_n}$?*

Решение. Предположим, что существует предел $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Переход к пределу в рекуррентном равенстве дает: $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+2} = \lim\limits_{n\to\infty} (a_{n+1} + \frac{1}{a_n}) = a + \frac{1}{a}$. Таким образом, получаем уравнение: $a = a + \frac{1}{a}$, которое очевидно не имеет решений. Пришли к противоречию, значит, предел не существует, и последовательность расходится.

2.4. *Доказать равенства (a>1):*

$$\text{а) } \lim_{n\to\infty} \frac{n}{a^n} = 0; \quad \text{б) } \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!} = 0;$$

$$\text{в) } \lim_{n\to\infty} \frac{\log_a n}{n} = 0; \quad \text{г) } \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1.$$

Доказательство. а) Достаточно показать, что $\forall \varepsilon > 0$ найдется номер $N = N(\varepsilon)$ такой, что при всех $n > N$ верно неравенство $|\frac{n}{a^n}| < \varepsilon$. Воспользуемся формулой бинома Ньютона: $0 < \frac{n}{a^n} =$

$$= \frac{n}{(1 + (a-1))^n} = \frac{n}{1 + n(a-1) + \frac{n(n-1)}{2}(a-1)^2 + \ldots + (a-1)^n} <$$

$$< \frac{n}{\frac{n(n-1)}{2}(a-1)^2} = \frac{2}{(n-1)(a-1)^2} < \varepsilon.$$

Последнее неравенство верно при $n - 1 > \frac{2}{\varepsilon(a-1)^2}$. Отсюда следует, что при $n > N(\varepsilon) = [\frac{2}{\varepsilon(a-1)^2}] + 2$ верно неравенство $\frac{n}{a^n} < \varepsilon$. По определению предела это значит, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{a^n} = 0$, что и требовалось.

б) Имеем оценку

$$0 < \frac{2^n}{n!} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{2} \cdot \underbrace{\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{2}{n}}_{n-2} \leq 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} = \frac{9}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

Взяв любое $\varepsilon > 0$, из неравенства $\frac{9}{2} \cdot (\frac{2}{3})^n < \varepsilon$ несложно найти искомый номер $N(\varepsilon)$ такой, что для всех $n, n \geq N$, будет выполняться последнее неравенство, а значит, и неравенство $0 < \frac{2^n}{n!} < \varepsilon$. Это означает, по определению, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!} = 0$.

в) Достаточно доказать, что $\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, что при всех $n > N$ верно неравенство $0 < \frac{\log_a n}{n} < \varepsilon$. Левое неравенство, очевидно, выполняется при $n > 1$. Для правого неравенства имеем:

$$\frac{\log_a n}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow \log_a n < \varepsilon n \Leftrightarrow n < a^{\varepsilon n} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{n}{a^{\varepsilon n}} < 1 \Leftrightarrow \frac{n}{b^n} < 1 \ (b = a^{\varepsilon} > 1).$$

Последнее неравенство выполняется в силу пункта а). Это значит, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\log_a n}{n!} = 0$.

г) При $a = 1$ равенство очевидно. Пусть $a > 1$, тогда $\sqrt[n]{a} > 1$ и

$$a = (1 + (\sqrt[n]{a} - 1))^n > 1 + n(\sqrt[n]{a} - 1) > n(\sqrt[n]{a} - 1).$$

Отсюда после деления на n получаем $0 < \sqrt[n]{a} - 1 < \frac{a}{n} < \varepsilon$ при $n > \frac{a}{\varepsilon}$, что в силу произвольности ε означает, что $\sqrt[n]{a} \to 1$ при $n \to \infty$.

2.5. *Вычислить пределы числовых последовательностей:*

а) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \ldots + \frac{n-1}{n^2}\right)$.

Решение. а) Умножим и разделим выражение под знаком предела на сопряженное: $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) =$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0.$$

б) Поделим числитель и знаменатель дроби одновременно на 3^n:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(-\frac{2}{3})^n + 1}{-2(-\frac{2}{3})^n + 3} = \frac{1}{3}.$$

в) Приведя дроби к единому знаменателю и упростив полученное в числителе выражение по формуле суммы $(n-1)$-го члена арифметической прогрессии, получим

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 + 2 + \ldots + (n-1)}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n(n-1)}{2}}{n^2} = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n} = \frac{1}{2}.$$

2.6. *Вычислить пределы числовых последовательностей, если известно, что они существуют:*

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}}}}_{n \text{ корней}}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[8]{2} \cdot \ldots \cdot \sqrt[2^n]{2})$.

Решение. а) Обозначим через a_n число, стоящее под знаком предела. Перепишем это равенство в виде $a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}} \Leftrightarrow a_n^2 = 2 + a_{n-1}$. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n-1} = a$. Переходя к пределу в полученном выше рекуррентном равенстве, получим уравнение относительно a: $a^2 = 2 + a$, откуда, учитывая, что $a > 0$, находим $a = 2$.

Заметим, что описанным способом можно вычислить предел

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{\sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a + \ldots + \sqrt{a}}}}}_{n \text{ корней}} = \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}.$$

б) Преобразуем выражение под знаком предела:

$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[8]{2} \ldots \sqrt[2^n]{2}) = \lim_{n\to\infty} 2^{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} 2^{1 - \frac{1}{2^n}} = 2.$$

2.7. *Вычислить пределы числовых последовательностей:*

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{1 + \frac{1}{n}} - 1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{12n + 5}{\sqrt[3]{27n^3 + 6n^2 + 8}}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1^2}{n^3} + \frac{2^2}{n^3} + \ldots + \frac{(n-1)^2}{n^3}\right)$.

Решение. а) Сделаем замену $t = \sqrt[6]{1 + \frac{1}{n}}$, тогда имеем

$$\lim_{t\to 1} \frac{t^2 - 1}{t^3 - 1} = \lim_{t\to 1} \frac{(t-1)(t+1)}{(t-1)(t^2 + t + 1)} = \lim_{t\to 1} \frac{t+1}{t^2 + t + 1} = \frac{2}{3}.$$

б) Поделим на n одновременно числитель и знаменатель дроби:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{12 + \frac{5}{n}}{\sqrt[3]{27 + \frac{6}{n} + \frac{8}{n^3}}} = \frac{12}{\sqrt[3]{27}} = 4.$$

в) Перепишем предел в виде $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^3}(1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2)$. Докажем тождество $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, для этого выпишем n равенств

$$2^3 = (1+1)^3 = 1^3 + 3 \cdot 1^2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \cdot 1^2 + 1^3,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(n+1)^3 = n^3 + 3 \cdot n^2 \cdot 1 + 3 \cdot n \cdot 1^2 + 1^3$$

и сложим их между собой:

$$(n+1)^3=1+3(1^2+2^2+3^2+...+n^2)+3(1+2+3+...+n)+n.$$

Отсюда с учетом $1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$ получим тождество

$$1^2+2^2+...+n^2=\frac{1}{3}\left((n+1)^3-(n+1)-\frac{3}{2}n(n+1)\right)=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Применим полученное тождество для преобразования выражения под знаком предела:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{(1-\frac{1}{n})(2-\frac{1}{n})}{6}=\frac{1}{3}.$$

2.8. *Вычислить пределы числовых последовательностей:*

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+a+a^2+...+a^n}{1+b+b^2+...+b^n}$, где $|a|<1, |b|<1$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2^2}+\dfrac{5}{2^3}+...+\dfrac{2n-1}{2^n}\right)$.

Решение. а) Воспользуемся формулой сокращенного умножения

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+...+ab^{n-2}+b^{n-1}),\ n\in N:$$

$$1-a^{n+1}=(1-a)(1+a+a^2+...+a^n),\ 1-b^{n+1}=(1-b)(1+b+b^2+...+b^n).$$

Умножим числитель и знаменатель дроби на $(1-a)(1-b)$:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(1-a)(1-b)(1+a+a^2+...+a^n)}{(1-a)(1-b)(1+b+b^2+...+b^n)}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(1-a^{n+1})(1-b)}{(1-b^{n+1})(1-a)}=\frac{1-b}{1-a},\text{так как }\lim_{n\to\infty}\frac{1-a^{n+1}}{1-b^{n+1}}=1.$$

б) Обозначим $S_n=\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+...+\frac{2n-1}{2^n}$ и упростим эту сумму:

$$S_n-\frac{1}{2}S_n=\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+...+\frac{2n-1}{2^n}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+...+\frac{2n-1}{2^n}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}+\left(\frac{3}{2^2}-\frac{1}{2^2}\right)+\left(\frac{5}{2^3}-\frac{3}{2^3}\right)+...+\left(\frac{2n-1}{2^n}-\frac{2n-3}{2^n}\right)-\frac{2n-1}{2^{n+1}}=$$

$$=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+...+\frac{1}{2^{n-1}}\right)-\frac{2n-1}{2^{n+1}}.$$

Отсюда получаем, что $S_n=$

$$=1+\underbrace{1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{2^{n-2}}}_{\text{геом. прогрессия}}-\frac{2n-1}{2^n}=1+\frac{1-(\frac{1}{2})^{n-1}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{2n-1}{2^n}=3-\frac{2n+3}{2^n}.$$

Тогда, возвращаясь к пределу, получим $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}(3-\frac{2n+3}{2^n})=3$, так как $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2^n}=0$. Докажем это, используя формулу бинома Ньютона:

$$\left|\frac{n}{2^n}\right|=\frac{n}{(1+1)^n}=\frac{n}{1+n+\frac{n(n-1)}{2}+...+1}<\frac{n}{\frac{n(n-1)}{2}}=\frac{2}{n-1}<\varepsilon$$

для любого $\varepsilon>0$, если $n>1+\frac{2}{\varepsilon}$.

2.9. *Вычислить предел числовой последовательности*

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n}-\frac{2}{n}+\frac{3}{n}-...+\frac{(-1)^{n-1}n}{n}\right|.$$

Решение. Рассмотрим два случая: n – четно либо нечетно. Если $n=2k$, то разобьем слагаемые на пары, сгруппировав первое со вторым, третье – с четвертым...:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\left(\frac{1}{n}-\frac{2}{n}\right)+\left(\frac{3}{n}-\frac{4}{n}\right)+...+\left(\frac{n-1}{n}-\frac{n}{n}\right)\right|.$$

Количество пар равно $\frac{n}{2}$, значение разности дробей в каждой паре равна $-\frac{1}{n}$, поэтому

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{2}\cdot\left(-\frac{1}{n}\right)\right|=\frac{1}{2}.$$

Если $n=2k+1$, то получим $\frac{n}{2}$ пар, причем последнее слагаемое останется непарным:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\left(\frac{1}{n}-\frac{2}{n}\right)+\left(\frac{3}{n}-\frac{4}{n}\right)+...+\left(\frac{n-2}{n}-\frac{n-1}{n}\right)+1\right|.$$

При этом значение разности дробей в каждой паре по-прежнему равно $-\frac{1}{n}$, поэтому

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n}{2}\cdot\left(-\frac{1}{n}\right)+1\right|=\frac{1}{2}.$$

Таким образом, при всех натуральных n значение предела одно и то же и равно $\frac{1}{2}$.

Задачи для самостоятельного решения

2.10. *Сформулировать утверждения:*

а) *Число A не является пределом последовательности $\{a_n\}$.*

б) *Последовательность $\{a_n\}$ не имеет предела.*

в) *Последовательность $\{a_n\}$ не является бесконечно большой.*

ОТВЕТ. а) $\exists \varepsilon > 0 :\ \forall N \in \mathbb{N}\ \exists n_0 > N :\ |a_{n_0} - A| \geq \varepsilon$.

б) Какое бы число A ни взять, $\exists \varepsilon > 0 :\ \forall N \in \mathbb{N}\ \exists n_0 > N :$ $|a_{n_0} - A| \geq \varepsilon$.

в) $\exists E > 0 :\ \forall n_0 \in \mathbb{N}\ \exists n \geq n_0 :\ |a_n| \leq E$.

2.11. *Доказать равенства:* а) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$.

2.12. *Доказать, что* $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n}\right) = 0$.

Указание: воспользоваться неравенством (доказывается по индукции):

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

2.13. *Вычислить пределы последовательностей:*

$$\text{а) } \lim_{n\to\infty} \frac{10000n}{n^2+1};\quad \text{б) } \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}\right).$$

ОТВЕТЫ: а) 0. *Указание:* поделить одновременно числитель и знаменатель дроби на n^2. б) 1. *Указание:* воспользоваться тождеством $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$, $k = 1, 2, \ldots n$.

2.14. *Какое из выражений больше при достаточно больших n:* а) $100n + 200$ или $0{,}01n^2$; б) 2^n или n^{1000}; в) 1000^n или $n!$?

ОТВЕТЫ: а) второе; б) первое; в) второе.

Указание: составить отношения данных выражений и вычислить их пределы.

2.15. *Вычислить пределы последовательностей*

$$\text{а) } \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n}\right);\quad \text{б) } \lim_{n\to\infty} \frac{n}{1 + n^2 \cos \frac{\pi n}{2}}$$

ОТВЕТЫ: а) 0. б) Предел не существует. *Указание:* рассмотреть случаи $n = 2k$ и $n = 2k+1$ ($k \in \mathbb{N}$) и прийти к противоречию с теоремой о единственности предела.

Задачи к §3 главы 2

3.1. *Доказать, что последовательность $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n$, $n = 1, 2, \ldots$, возрастает и ограничена сверху, последовательность $y_n =$*

$(1 + \frac{1}{n})^{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$, убывает и ограничена снизу, и обе последовательности имеют общий предел

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = e.$$

Доказательство. Достаточно доказать, что $\frac{x_{n+1}}{x_n} > 1$ ($n \in \mathbb{N}$). Воспользуемся неравенством Бернулли ($\forall x > -1$ и $n \in \mathbb{N}$ верно неравенство $(1+x)^n \geq 1 + nx$, причем обращение в равенство происходит лишь при $x = 0$ или $n = 1$):

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(1 + \frac{1}{n+1})^{n+1}}{(1 + \frac{1}{n})^n} = \left(\frac{1 + \frac{1}{n+1}}{1 + \frac{1}{n}}\right)^{n+1} \left(1 + \frac{1}{n}\right) =$$

$$= \left(\frac{(n+2)n}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \frac{n+1}{n} = \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \frac{n+1}{n} >$$

$$> \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \frac{n+1}{n} = 1.$$

Покажем аналогично, что $\frac{y_n}{y_{n-1}} < 1$ ($n \in \mathbb{N}, n \geq 2$): $\quad \frac{y_n}{y_{n-1}}$

$$= \frac{(1 + \frac{1}{n})^{n+1}}{(1 + \frac{1}{n-1})^n} = \left(\frac{1 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n-1}}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \left(\frac{(n+1)(n-1)}{n^2}\right)^n \frac{n+1}{n} =$$

$$= \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n \frac{n+1}{n} = \frac{1}{(\frac{n^2}{n^2-1})^n} \frac{n+1}{n} = \frac{1}{(1 + \frac{1}{n^2-1})^n} \frac{n+1}{n} <$$

$$< \frac{1}{1 + \frac{n}{n^2-1}} \frac{n+1}{n} = \frac{(n^2-1)(n+1)}{(n^2+n-1)n} = \frac{n^3+n^2-n-1}{n^3+n^2-n} < 1.$$

Ограниченность сверху последовательности $\{x_n\}$ следует из неравенства $x_n < y_n < y_1$, а ограниченность снизу последовательности $\{y_n\}$ – из неравенства $x_1 < x_n < y_n$. Итак, обе последовательности сходятся, причем $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = e$. Из неравенства, приведенного ниже, следует, что они сходятся к одному пределу:

$$0 < y_n - x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \frac{1}{n} < \frac{e}{n} \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

3.2. *Доказать неравенство* $\left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < e\left(\frac{n}{2}\right)^n$ ($n \in \mathbb{N}$).

Доказательство. 1) Левое неравенство докажем методом математической индукции. При $n = 1$ имеем $1! > \frac{1}{e}$ — верно. Предположим, что при некотором произвольном $n = k > 1$ верно $k! > \left(\frac{k}{e}\right)^k$ и докажем, что тогда неравенство выполняется для $k+1$:

$$(k+1)! = k!(k+1) > \left(\frac{k}{e}\right)^k (k+1) =$$

$$= \left(\frac{k+1}{e}\right)^{k+1} \frac{e}{(1+\frac{1}{k})^k} > \left(\frac{k+1}{e}\right)^{k+1}.$$

В силу произвольности k отсюда следует справедливость левого неравенства $\forall n \in \mathbb{N}$.

2) Для доказательства правого неравенства воспользуемся неравенством $n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$, $n > 1$, вытекающим из неравенства Коши:

$$n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n = e\left(\frac{n}{2}\right)^n \frac{\left(\frac{n+1}{2}\right)^n}{e\left(\frac{n}{2}\right)^n} = e\left(\frac{n}{2}\right)^n \frac{(1+\frac{1}{n})^n}{e} < e\left(\frac{n}{2}\right)^n.$$

3.3. *Доказать неравенство* $\frac{1}{n+1} < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$.

Доказательство. Логарифмируя неравенство

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1},$$

имеем $n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \ln e = 1 < (n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$, откуда и получаем требуемое.

3.4. *Пользуясь теоремой о существовании предела монотонной и ограниченной последовательности, доказать сходимость последовательности*

$$x_n = \left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{8}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{2^n}\right).$$

Доказательство. Последовательность возрастает, так как $\frac{x_{n+1}}{x_n} = 1 + \frac{1}{2^{n+1}} > 1$. Покажем ее ограниченность сверху, воспользовавшись неравенством Коши:

$$\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{8}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{2^n}\right)} \le$$

$$\le \frac{(1+\frac{1}{2}) + (1+\frac{1}{4}) + (1+\frac{1}{8}) + \ldots + (1+\frac{1}{2^n})}{n},$$

откуда $x_n = \left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{8}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{2^n}\right) \le$

$$\left(\frac{n + (\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n})}{n}\right)^n < \left(\frac{n + (\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots)}{n}\right)^n =$$

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e.$$

По-другому ограниченность $\{x_n\}$ можно доказать, используя неравенство $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$:

$$\ln x_n = \ln\left(1+\frac{1}{2}\right) + \ln\left(1+\frac{1}{4}\right) + \ln\left(1+\frac{1}{8}\right) + \ldots + \ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right) <$$

$$< \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n} < \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots = 1 \Rightarrow x_n < e.$$

3.5. *Пользуясь теоремой о существовании предела монотонной и ограниченной последовательности, доказать сходимость последовательности и найти ее предел*

$$x_1 = \sqrt{2}, \quad x_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}}, \quad x_n = \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}_{n \text{ корней}}.$$

Доказательство. Заметим, что $x_{k+1} = \sqrt{2+x_k}$, $k \in \mathbb{N}$. Докажем по индукции, что последовательность ограничена сверху числом 2. Очевидно, что $x_1 = \sqrt{2} < 2$. Покажем, что $\forall k \in \mathbb{N}$ из $x_k < 2$ следует $x_{k+1} < 2$. Действительно, $x_{k+1} = \sqrt{2+x_k} < \sqrt{2+2} = 2$.

Используя индукцию, покажем теперь возрастание последовательности. При $n = 1$ имеем $x_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}} > \sqrt{2} = x_1$ — верно. Пусть при некотором произвольном $k \in \mathbb{N}$ выполняется $x_{k+1} > x_k$, покажем, что тогда $x_{k+2} > x_{k+1}$. В самом деле, $x_{k+2} = \sqrt{2+x_{k+1}} > \sqrt{2+x_k} = x_{k+1}$, что и требовалось доказать.

Итак, последовательность $\{x_n\}$ сходится к некоторому пределу, обозначим его a. Перейдя в рекуррентном равенстве $x_{k+1} = \sqrt{2+x_k}$ к пределу при $k \to +\infty$, получим $a = \sqrt{2+a}$. Решая это уравнение с учетом положительности a, находим $a = 2$.

3.6. *Найти наименьший член последовательности* $x_n = n + \frac{100}{n}$, $n \in \mathbb{N}$.

Решение. Составим и решим неравенство $x_{n+1} - x_n = (n+1+\frac{100}{n+1}) - (n+\frac{100}{n}) = \frac{n^2+n-100}{n(n+1)} > 0 \Leftrightarrow n^2+n-100 > 0 \Leftrightarrow n > \frac{-1+\sqrt{401}}{2}$, т.е. начиная с $n = 10$ последовательность монотонно возрастает (в частности, $x_{11} > x_{10}$). Итак, наименьший член последовательности $x_{10} = 10 + \frac{100}{10} = 20$.

3.7. *Найти наибольший член последовательности* $x_n = \frac{1000^n}{n!}$, $n \in \mathbb{N}$.

Решение. Так как $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1000}{n+1}$, то при $n < 999$ последовательность монотонно возрастает, а при $n > 999$ – убывает. Следовательно, наибольший член последовательности – это $x_{1000} = \frac{1000^{1000}}{1000!}$.

3.8. *Доказать, что последовательности* $\{x_n\}, \{y_n\}$ $(n = 1, 2, \dots)$, *определяемые формулами* $x_1 = a$, $y_1 = b$ $(a \geq 0,\ b \geq 0)$,

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}, \quad y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2},$$

имеют общий предел $\mu(a, b) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$, *который называют арифметико-геометрическим средним чисел* a *и* b.

Доказательство. Покажем, что последовательность $\{x_n\}$ монотонно не убывает: $y_{n+1} = \dfrac{x_n + y_n}{2} \geq \sqrt{x_n y_n} = x_{n+1}$. Поэтому с учетом неотрицательности x_n получим $x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n} \geq \sqrt{x_n^2} = x_n$.

Аналогично доказывается монотонное невозрастание последовательности $\{y_n\}$: $y_{n+1} = \dfrac{x_n + y_n}{2} \leq \dfrac{y_n + y_n}{2} = y_n$. Кроме того, так как при всех n справедливо $x_n \leq y_n \leq y_1$; $y_n \geq x_n \geq x_1$, то обе последовательности ограничены: $\{x_n\}$ – сверху, а $\{y_n\}$ – снизу. Поэтому последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ сходятся.

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$. Покажем, что $A = B$. В самом деле, переходя к пределу в равенстве $y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}$ при $n \to \infty$, получим $B = \dfrac{A+B}{2} \Leftrightarrow A = B$.

Задачи для самостоятельного решения

3.9. *Пользуясь теоремой о существовании предела монотонной и ограниченной последовательности, доказать сходимость последовательностей* $(n \in \mathbb{N})$:

а) $x_n = \dfrac{10}{1} \cdot \dfrac{11}{3} \cdot \ldots \cdot \dfrac{n+9}{2n-1}$; б) $x_n = \left(1 - \dfrac{1}{2}\right)\left(1 - \dfrac{1}{4}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \dfrac{1}{2^n}\right)$.

3.10. *Пользуясь теоремой о существовании предела монотонной и ограниченной последовательности, доказать сходимость последовательности*

$$x_n = p_0 + \frac{p_1}{10} + \frac{p_2}{10^2} + \ldots + \frac{p_n}{10^n}, \quad n \in \mathbb{N},$$

где p_i, $i = 0, 1, \dots$, *– целые неотрицательные числа, не превышающие 9, начиная с* p_1.

3.11. *Доказать, что* $0 < e - (1 + \frac{1}{n})^n < \frac{3}{n}$, $n \in \mathbb{N}$.

3.12. *Найти наименьший член последовательности* $x_n = n^2 - 9n - 100$.

ОТВЕТ: $x_4 = x_5 = -120$.

3.13. *Найти наибольший член последовательности* $x_n = \frac{n^2}{2^n}$, $n \in \mathbb{N}$.

ОТВЕТ: $x_3 = \frac{9}{8}$.

Задачи к §4 главы 2

4.1. *Для последовательности* $\{x_n\}$ $(n \in \mathbb{N})$ *найти* $\inf\{x_n\}$, $\sup\{x_n\}$, $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n$, $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$, *если*

$$\text{а) } x_n = (-1)^{n-1}\left(2 + \frac{3}{n}\right); \quad \text{б) } x_n = 1 + \frac{n}{n+1}\cos\frac{\pi n}{2}.$$

Решение. а) Выделим из $\{x_n\}$ две подпоследовательности с четными и нечетными номерами: $x_{2k-1} = 2 + \frac{3}{2k-1}$ и $x_{2k} = -2 - \frac{3}{2k}$ $(k \in \mathbb{N})$. Заметим, что $\forall k \in \mathbb{N}$ $x_{2k} < x_{2k-1}$, причем $\{x_{2k-1}\}$, монотонно убывая, сходится к 2, а $\{x_{2k}\}$, монотонно возрастая, сходится к -2. Поэтому $\sup\{x_n\} = x_1 = 5$, $\inf\{x_n\} = x_2 = -\frac{7}{2}$, $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_{2k} = -2$, $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_{2k-1} = 2$.

Замечание. Последовательность $\{x_n\}$ не является сходящейся, так как $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n \neq \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$.

б) Разобьем $\{x_n\}$ на 4 подпоследовательности: $n = 4k - 3$, $n = 4k - 2$, $n = 4k - 1$, $n = 4k$ $(k \in \mathbb{N})$.

Если $n = 4k - 3$, то $\cos\frac{\pi n}{2} = 0$, $x_{4k-3} \equiv 1$ – постоянна и, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} x_{4k-3} = \sup\{x_{4k-3}\} = \inf\{x_{4k-3}\} = 1$.

Если $n = 4k - 2$, то $\cos\frac{\pi n}{2} = -1$, $x_{4k-2} = 1 - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}$ – убывая, стремится к 0. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} x_{4k-2} = \inf\{x_{4k-2}\} = 0$, $\sup\{x_{4k-2}\} = x_{4k-2}|_{k=1} = x_2 = \frac{1}{3}$.

Если $n = 4k - 1$, то $\cos\frac{\pi n}{2} = 0$, $x_{4k-1} \equiv 1$ – постоянна. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} x_{4k-1} = \inf\{x_{4k-1}\} = \sup\{x_{4k-1}\} = 1$.

Если $n = 4k$, то $\cos\frac{\pi n}{2} = 1$, $x_{4k} = 1 + \frac{n}{n+1} = \frac{2n+1}{n+1} = \frac{2(n+1)-1}{n+1} = 2 - \frac{1}{n+1}$ – возрастая, стремится к 2. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} x_{4k} = \sup\{x_{4k}\} = 2$, $\inf\{x_{4k}\} = x_{4k}|_{k=1} = x_4 = \frac{9}{5}$.

Тогда

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n = \min\{\lim_{n\to\infty} x_{4k}, \lim_{n\to\infty} x_{4k-1}, \lim_{n\to\infty} x_{4k-2}, \lim_{n\to\infty} x_{4k-3}\} = 0,$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \max\{\lim_{n\to\infty} x_{4k}, \lim_{n\to\infty} x_{4k-1}, \lim_{n\to\infty} x_{4k-2}, \lim_{n\to\infty} x_{4k-3}\} = 2,$$

$$\inf\{x_n\} = \min\{\inf\{x_{4k}\}, \inf\{x_{4k-1}\}, \inf\{x_{4k-2}\}, \inf\{x_{4k-3}\}\} = 0,$$

$$\sup\{x_n\} = \max\{\sup\{x_{4k}\}, \sup\{x_{4k-1}\}, \sup\{x_{4k-2}\}, \sup\{x_{4k-3}\}\} = 2.$$

Замечание. Случаи $n = 4k-3$ и $n = 4k-1$ можно было объединить в один: $n = 2k-1$. Отметим также, что полученные результаты следуют из цепочки:

$$0 \downarrow x_{4k-2} < x_{2k-1} < x_{4k} \uparrow 2,$$

выполняемой при всех $k \in \mathbb{N}$. Здесь $x_{4k-2} = \frac{1}{4k-1}$, $x_{2k-1} = 2 - \frac{1}{2k}$, $x_{4k} = 2 - \frac{1}{4k+1}$, а стрелки указывают направление монотонности.

4.2. *Найти частичные пределы последовательности*

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{7}{8}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \frac{2^n-1}{2^n}, \ldots$$

Решение. Из членов данной последовательности выделим две сходящиеся подпоследовательности (с нечетными и четными номерами): $x'_n = \frac{1}{2^n}$ и $x''_n = \frac{2^n-1}{2^n}$, $n \in \mathbb{N}$. Их пределы $\lim\limits_{n\to\infty} x'_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} x''_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n-1}{2^n} = 1$ будут частичными пределами последовательности. Других предельных точек нет (см. утверждение 4.5 главы 2).

4.3. *Построить пример числовой последовательности, имеющей в качестве своих частичных пределов числа $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_p$.*

Решение. В качестве одного из примеров приведем последовательность вида $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_p, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_p, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_p, \ldots$

Построим другой пример. Для этого рассмотрим последовательности вида $x_{kn} = a_k + \frac{1}{n}$, $k = 1, 2, \ldots, p$; $n \in \mathbb{N}$, которые при $n \to +\infty$ сходятся к своим пределам a_k. Составим из членов последовательностей x_{kn} последовательность, например, вида

$$a_1+1, a_2+1, \ldots, a_p+1, a_1+\frac{1}{2}, a_2+\frac{1}{2}, \ldots, a_p+\frac{1}{2}, \ldots, a_1+\frac{1}{n}, a_2+\frac{1}{n}, \ldots, a_p+\frac{1}{n}, \ldots$$

которая также удовлетворяет условиям задачи.

4.4. *Построить пример числовой последовательности, для которой все члены данной числовой последовательности $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ являются ее частичными пределами. Какие еще частичные пределы обязательно имеет построенная последовательность?*

Решение. В качестве простейшего примера приведем последовательность $a_1, a_1, a_2, a_1, a_2, a_3, a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$.

Другой пример – последовательность

$$a_1, a_1 + \frac{1}{2}, a_2, a_1 + \frac{1}{3}, a_2 + \frac{1}{3}, a_3, a_1 + \frac{1}{4}, a_2 + \frac{1}{4}, a_3 + \frac{1}{4}, a_4, \ldots$$

составленная из членов последовательностей $x_n = a_n$, $x_{kn} = a_k + \frac{1}{n+k}$ $(k, n \in \mathbb{N})$. Эта последовательность имеет своими частичными пределами не только числа $a_1, a_2, a_3, \ldots$, но и все частичные пределы, имеющиеся у последовательности $\{a_n\}$.

4.5. *Пусть последовательность $\{x_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, сходится, а последовательность $\{y_n\}$ – расходится. Что можно утверждать о сходимости последовательностей*

а) $\{x_n + y_n\}$; б) $\{x_n y_n\}$?

Решение. а) Последовательность $\{x_n + y_n\}$ – расходится. Действительно, если бы она сходилась, то сходилась бы и разность последовательностей $\{x_n + y_n\}$ и $\{x_n\}$. Но это невозможно, так как $\{(x_n + y_n) - x_n\} = \{y_n\}$, а $\{y_n\}$ – расходится.

б) Последовательность $\{x_n y_n\}$ может как сходиться, так и расходиться. Например, $\{x_n\} = \frac{1}{n}$ – сходится, $\{y_n\} = (-1)^n$ – расходится, $\{x_n y_n\} = \frac{(-1)^n}{n}$ – сходится. Или $\{x_n\} = \frac{1}{n}$ – сходится, $\{y_n\} = (-1)^n n$ – расходится, $\{x_n y_n\} = (-1)^n$ – расходится.

4.6. *Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ и $\{y_n\}$ – произвольная последовательность. Можно ли утверждать, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 0$? Привести различные примеры.*

Решение. Если $\{y_n\}$ имеет конечный предел, то да. Например, $\{x_n\} = \frac{1}{n}$, $\{y_n\} = 2 + \frac{1}{n}$.

Если $\{y_n\} \to \pm\infty$, то $\{x_n y_n\}$ может как сходиться, так и расходиться. Например, $\{x_n y_n\}$ сходится для $\{x_n\} = \frac{1}{n^2}$, $\{y_n\} = n$ и расходится для $\{x_n\} = \frac{1}{n}$, $\{y_n\} = n^2$.

Если $\{y_n\}$ не имеет предела, то $\{x_n y_n\}$ может и сходиться, и расходиться. Например, она сходится при $\{x_n\} = \frac{1}{n}$, $\{y_n\} = (-1)^n$, и расходится при $\{x_n\} = \frac{1}{n}$, $\{y_n\} = (-1)^n n$.

Задачи для самостоятельного решения

4.7. *Для последовательности $\{x_n\}$ $(n \in \mathbb{N})$ найти $\inf\{x_n\}$, $\sup\{x_n\}$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$, если* а) $x_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1+(-1)^n}{2}$; б) $x_n = 1 + 2(-1)^{n+1} + 3(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

ОТВЕТЫ: а) $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = 0$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = 1$, $\inf\{x_n\} = -1$, $\sup\{x_n\} = 1,5$; б) $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = \inf\{x_n\} = -4$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = \sup\{x_n\} = 6$.

4.8. *Для последовательности* $\{x_n\}$ $(n \in \mathbb{N})$ *найти* $\inf\{x_n\}$, $\sup\{x_n\}$, $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n$, $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$, *если* а) $x_n = \frac{n-1}{n+1}\cos\frac{2\pi n}{3}$; б) $x_n = n^{(-1)^n}$.

ОТВЕТЫ: а) $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = \inf\{x_n\} = -\frac{1}{2}$, $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_n\} = 1$;

б) $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = \inf\{x_n\} = 0$, $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_n\} = +\infty$.

4.9. *Построить пример числовой последовательности:* а) *не имеющей конечных частичных пределов;* б) *имеющей единственный конечный частичный предел, но не являющейся сходящейся;* в) *имеющей бесконечное множество частичных пределов.*

ОТВЕТЫ: а) $\{x_n\} = n$ или $\{x_n\} = -n^3$;

б) Пусть $\{x_n\} \to a$, $\{y_n\}$ – бесконечно большая последовательность, тогда $x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_n, y_n, \ldots$ – расходится и при этом имеет единственный конечный частичный предел a. Например, $\{x_n\} = \frac{1}{n}$, $\{y_n\} = n$;

в) Например, $a_1, a_1, a_2, a_1, a_2, a_3, a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$

4.10. *Пусть последовательности* $\{x_n\}$ *и* $\{y_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, *расходятся. Можно ли утверждать, что последовательности* а) $\{x_n + y_n\}$; б) $\{x_n y_n\}$ также расходятся? Привести примеры.

ОТВЕТЫ: Нет. а) $\{x_n\} = n$, $\{y_n\} = n^2$ расходятся и $\{x_n + y_n\}$ – расходится; $\{x_n\} = n$, $\{y_n\} = 1 - n$ расходятся, а $\{x_n + y_n\} \equiv 1$ сходится; б) $\{x_n\} = n$, $\{y_n\} = n^3$ расходятся и $\{x_n y_n\}$ – расходится; $\{x_n\} = (-1)^n$, $\{y_n\} = 2(-1)^n$ расходятся, а $\{x_n y_n\} \equiv 2$ – сходится.

4.11. *Пусть* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 0$. *Следует ли отсюда, что либо* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, *либо* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$? *Рассмотреть пример:* $\{x_n\} = \frac{1+(-1)^n}{2}$, $\{y_n\} = \frac{1-(-1)^n}{2}$, $n \in \mathbb{N}$.

ОТВЕТ: Нет, см. предложенный пример.

Задачи к §5 главы 2

Задачи этого раздела предлагается решать, применяя критерий Коши сходимости (расходимости) числовой последовательности.

5.1. *Доказать сходимость последовательностей:*

$$\text{а) } x_n = \frac{\sin 1}{2} + \frac{\sin 2}{2^2} + \ldots + \frac{\sin n}{2^n}; \quad \text{б) } x_n = \frac{\cos(1!)}{2} + \frac{\cos(2!)}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{\cos(n!)}{n(n+1)}.$$

Доказательство. а) Достаточно доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется зависящий от него номер $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ такой, что при всех $n > N$ и всех натуральных p будет справедливо неравенство $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$. Оценим модуль разности: $|x_{n+p} - x_n| =$

$$= \left|\frac{\sin(n+1)}{2^{n+1}} + \ldots + \frac{\sin(n+p)}{2^{n+p}}\right| \le \left|\frac{\sin(n+1)}{2^{n+1}}\right| + \ldots + \left|\frac{\sin(n+p)}{2^{n+p}}\right| \le$$

$$\le \frac{1}{2^{n+1}} + \ldots + \frac{1}{2^{n+p}} < \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \ldots + \frac{1}{2^{n+p}} + \ldots = \frac{1}{2^n}.$$

Неравенство $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$ верно при $n > -\log_2 \varepsilon$, поэтому, начиная с номера $[-\log_2 \varepsilon] + 1$, сразу для всех $p \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$, т.е. выполнено необходимое и достаточное условие сходимости последовательности.

б) Действуя аналогично пункту а), оценим модуль разности:

$$|x_{n+p} - x_n| = \left|\frac{\cos(n+1)!}{(n+1)(n+2)} + \ldots + \frac{\cos(n+p)!}{(n+p)(n+p+1)}\right| \le$$

$$\le \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \ldots + \frac{1}{(n+p)(n+p+1)}.$$

Используя тождество $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ $(k = n+1, \ldots, n+p)$, представим каждое слагаемое в виде разности двух дробей:

$$|x_{n+p} - x_n| \le \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right) + \ldots +$$

$$\left(\frac{1}{n+p} - \frac{1}{n+p+1}\right) = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+p+1} < \frac{1}{n+1}.$$

Неравенство $\frac{1}{n+1} < \varepsilon$ верно при $n \ge [\frac{1}{\varepsilon}]$, поэтому, начиная с этого номера, при всех $p \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$, что и доказывает сходимость последовательности.

5.2. *Доказать сходимость последовательностей*

$$\text{а) } x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2};$$

$$\text{б) } x_n = \operatorname{arctg}\frac{1}{1\cdot 2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \operatorname{arctg}\frac{1}{n\cdot(n+1)}.$$

Доказательство. а) Достаточно доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется зависящий от него номер $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ такой, что $\forall n > N$ и $\forall p \in \mathbb{N}$ будет справедливо неравенство $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$. Рассмотрим модуль разности

$$|x_{n+p} - x_n| = \left|\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \ldots + \frac{1}{(n+p)^2}\right| =$$

$$= \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \ldots + \frac{1}{(n+p)^2}.$$

Воспользовавшись вспомогательным неравенством $\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$ $(k = 2, 3, ..)$, получим:

$$|x_{n+p} - x_n| < \frac{1}{(n+1)n} + \frac{1}{(n+2)(n+1)} + ... + \frac{1}{(n+p)(n+p-1)} =$$

$$= \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + ... + \left(\frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p}\right) =$$

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n}.$$

Неравенство $\frac{1}{n} < \varepsilon$ верно при $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Поэтому, начиная с номера $[\frac{1}{\varepsilon}] + 1$, сразу для всех натуральных p выполняется неравенство $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$, т.е. выполнено необходимое и достаточное условие сходимости последовательности.

б) Достаточно доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется зависящий от него номер $N \in \mathbb{N}$ такой, что при всех $n > N$ и всех $p \in \mathbb{N}$ будет справедливо неравенство $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$. Принимая во внимание неравенство $|\operatorname{arctg} x| \le |x|$, оценим модуль разности:

$$|x_{n+p} - x_n| = \left|\operatorname{arctg}\frac{1}{(n+1)(n+2)} + ... + \operatorname{arctg}\frac{1}{(n+p)(n+p+1)}\right| \le$$

$$\le \left|\operatorname{arctg}\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right| + \left|\operatorname{arctg}\frac{1}{(n+2)(n+3)}\right| + ... +$$

$$+ \left|\operatorname{arctg}\frac{1}{(n+p)(n+p+1)}\right| = \operatorname{arctg}\frac{1}{(n+1)(n+2)} +$$

$$+ \operatorname{arctg}\frac{1}{(n+2)(n+3)} + ... + \operatorname{arctg}\frac{1}{(n+p)(n+p+1)} \le$$

$$\le \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + ... + \frac{1}{(n+p)(n+p+1)} =$$

$$\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+p+1} \le \frac{1}{n+1}.$$

Выбрав теперь произвольное $\varepsilon > 0$ и решив неравенство $\frac{1}{n+1} < \varepsilon$, находим, что начиная с номера $[\frac{1}{\varepsilon}]$ при всех натуральных p выполняется неравенство $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$, что доказывает сходимость последовательности.

5.3. *При помощи критерия Коши доказать расходимость последовательностей:*

а) $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}$; б) $x_n = \frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} + ... + \frac{1}{\ln n}$ $(n = 2, 3, ...)$.

Доказательство. а) Достаточно доказать, что найдется $\varepsilon_0 > 0$ такое, что $\forall N \in \mathbb{N}$ (сколь угодно большого) найдутся натуральный номер $n > N$ и натуральное p такие, что будет справедливо неравенство $|x_{n+p} - x_n| \ge \varepsilon_0$. Оценим модуль разности: $|x_{n+p} - x_n| =$

$$= \left|\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{n+p}\right| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{n+p} > \frac{p}{n+p}.$$

Тогда, каким бы большим ни взять n, всегда можно выбрать,

например, $p = n$, и получить $|x_{n+p} - x_n| > \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$.

Возьмем в качестве ε_0 любое число из интервала $(0, \frac{1}{2})$, например, $\frac{1}{3}$. Итак, нашлось $\varepsilon_0 = \frac{1}{3}$ такое, что для любого сколь угодно большого $n \in \mathbb{N}$, выбирая $p = n$, получим, что справедливо неравенство $|x_{n+p} - x_n| \ge \varepsilon_0$. Это доказывает расходимость последовательности.

б) Оценим модуль разности: $|x_{n+p} - x_n| =$

$$\left|\frac{1}{\ln(n+1)} + \frac{1}{\ln(n+2)} + ... + \frac{1}{\ln(n+p)}\right| =$$

$$= \frac{1}{\ln(n+1)} + \frac{1}{\ln(n+2)} + ... + \frac{1}{\ln(n+p)} > \frac{p}{\ln(n+p)} > \frac{p}{n+p}.$$

При $p = n$ получим $|x_{n+p} - x_n| > \frac{1}{2}$. То есть нашлось ε_0 – любое число из интервала $(0, \frac{1}{2})$ – такое, что $\forall n \in \mathbb{N}$ всегда найдется натуральное p (достаточно взять $p = n$), что справедливо неравенство $|x_{n+p} - x_n| \ge \varepsilon_0$. Это, согласно критерию Коши, и доказывает расходимость последовательности.

5.4. *Доказать расходимость последовательности:*

$$x_n = \sin 1 + \sin\frac{1}{2} + \sin\frac{1}{3} + ... + \sin\frac{1}{n}.$$

Доказательство. Оценим модуль разности $|x_{n+p} - x_n| =$

$$= \left|\sin\frac{1}{n+1} + \sin\frac{1}{n+2} + ... + \sin\frac{1}{n+p}\right| = \sin\frac{1}{n+1} + \sin\frac{1}{n+2} + ... +$$

$$+ \sin\frac{1}{n+p} > p\sin\frac{1}{n+p} = \frac{\sin\frac{1}{n+p}}{\frac{1}{n+p}} \cdot \frac{p}{n+p}.$$

Каким бы большим ни взять n, всегда можно выбрать, например,

$p = n$, и получить $|x_{2n} - x_n| > \frac{\sin\frac{1}{2n}}{\frac{1}{2n}} \cdot \frac{1}{2}$.

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{2n}}{\frac{1}{2n}} = 1$, то найдется натуральный номер n_0 такой, что $\forall n \ge n_0$ $\frac{\sin\frac{1}{2n}}{\frac{1}{2n}} > \frac{1}{2}$, но тогда получим, что начиная с этого номера $|x_{2n} - x_n| > \frac{1}{4}$. Возьмем в качестве ε_0 любое число из интервала $(0, \frac{1}{4})$, например, $\frac{1}{5}$. Итак, нашлось $\varepsilon_0 = \frac{1}{5}$ такое, что для любого сколь угодно большого $n \in \mathbb{N}$, выбирая $p = n$, имеем выполнение неравенства $|x_{n+p} - x_n| \ge \varepsilon_0$. Это доказывает расходимость последовательности.

5.5. *Доказать, что последовательность*

$$x_n = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \ldots + \frac{1}{n^\alpha}$$

а) *сходится при* $\alpha \ge 2$; б) *расходится при* $\alpha \le 1$.

Доказательство. а) Так как $\alpha \ge 2$, то имеем $|x_{n+p} - x_n| =$

$$= \left|\frac{1}{(n+1)^\alpha} + \frac{1}{(n+2)^\alpha} + \ldots + \frac{1}{(n+p)^\alpha}\right| = \frac{1}{(n+1)^\alpha} + \frac{1}{(n+2)^\alpha} + \ldots +$$

$$+ \frac{1}{(n+p)^\alpha} \le \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \ldots + \frac{1}{(n+p)^2} < \frac{1}{(n+1)n} +$$

$$+ \frac{1}{(n+2)(n+1)} + \ldots + \frac{1}{(n+p)(n+p-1)} = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) +$$

$$\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n}.$$

Выбрав произвольное $\varepsilon > 0$ и решив неравенство $\frac{1}{n} < \varepsilon$, получим, что при всех $n \ge [\frac{1}{\varepsilon}] + 1$ сразу для всех $p \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$, т.е. выполнено необходимое и достаточное условие сходимости для данной последовательности.

$$\text{б)Имеем } |x_{n+p} - x_n| = \frac{1}{(n+1)^\alpha} + \frac{1}{(n+2)^\alpha} + \ldots + \frac{1}{(n+p)^\alpha} \ge$$

$$\ge \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+p} > \frac{p}{n+p}.$$

Тогда, каким бы большим ни взять n, выберем, например, $p = n$, и

$$\text{получим } |x_{n+p} - x_n| > \frac{p}{n+p} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Возьмем в качестве ε_0 любое число из интервала $(0, \frac{1}{2})$, например, $\frac{1}{3}$. Итак, нашлось $\varepsilon_0 = \frac{1}{3}$ такое, что для любого сколь угодно большого $n \in \mathbb{N}$ существует такое натуральное $p = n$, что справедливо

неравенство $|x_{n+p} - x_n| \ge \varepsilon_0$, что доказывает расходимость последовательности.

Замечание. При $1 < \alpha < 2$ решение задачи с помощью критерия Коши более сложно. На 2 курсе в разделе "Числовые ряды" будет доказано, что числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ сходится при $\alpha > 1$.

Задачи для самостоятельного решения

5.6. *Доказать сходимость последовательностей:*

$$\text{а) } x_n = \sin\frac{1}{2^1} + \sin\frac{1}{2^2} + \ldots + \sin\frac{1}{2^n};$$

$$\text{б) } x_n = \arcsin 1 + \arcsin\frac{1}{2^2} + \arcsin\frac{1}{3^2} + \ldots + \arcsin\frac{1}{n^2}.$$

Указание: воспользоваться неравенствами $|\sin x| \le |x|$ $(x \in \mathbb{R})$, $|\arcsin x| \le \frac{\pi}{2}|x|$ $(x \in [-1, 1])$.

5.7. *Доказать сходимость последовательности*

$x_n = a_0 + a_1 q + a_2 q^2 + \ldots + a_n q^n$ где $|a_k| < M$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$, $|q| < 1$.

Указание: воспользоваться тем, что $|q|^{n+1} + |q|^{n+2} + \ldots + |q|^{n+p} < |q|^{n+1} + |q|^{n+2} + \ldots = \frac{|q|^{n+1}}{1 - |q|}$.

5.8. *Доказать расходимость последовательностей:* а) $x_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}$; б) $x_n = \frac{1}{\lg 2} + \frac{1}{\lg 3} + \ldots + \frac{1}{\lg n}$ $(n = 2, 3, \ldots)$.

5.9. *Доказать расходимость последовательностей:* а) $x_n = \sin 1 + \sin\frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \sin\frac{1}{\sqrt[3]{3}} + \ldots + \sin\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$; б) $x_n = \operatorname{arctg}\frac{1}{\ln 2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{\ln 3} + \ldots + \operatorname{arctg}\frac{1}{\ln n}$ $(n = 2, 3, \ldots)$.